Anno Accademico 2023/2024
Geometria 1 - secondo compitino 24/5/2024

Esercizio 1. Sia $M_a \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}),\ a \in \mathbb{R}$, la matrice $M_a = \begin{bmatrix} 0 & 1-a^2 & 0 & a^2-1 \\ 1 & 0 & -1 & a^3-a \\ a-a^3 & 1-a^2 & a^3-a & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & a^3-a \end{bmatrix}$

Calcolare la forma canonica di Jordan reale di M_a per $a = 0, 1, -1$.

Esercizio 2.

a) Determinare le possibili forme canoniche di Jordan per una matrice $A \in GL_4(\mathbb{C})$ con polinomio minimo di grado 2 e il cui polinomio caratteristico non è un quadrato e dedurne che la somma degli autovalori di A non coincide con la traccia di A.

b) Determinare le possibili forme canoniche di Jordan per una matrice $A \in GL_4(\mathbb{C})$ tale che $A^2 - \mathrm{tr}(A)A + \det(A)I_4 = 0$.

Esercizio 3. Sia (V, φ) lo spazio euclideo $V = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, con prodotto scalare $\varphi(A, B) = tr({}^tAB)$. Siano $f, g : V \to V$ gli endomorfismi $f(A) = \frac{1}{2}(A + {}^tA)$, $g(A) = \frac{1}{2}(A - {}^tA)$.

a) Dimostrare che f e g sono operatori simmetrici in V.

b) Sia $\mathcal{S}$ il sottospazio delle matrici simmetriche e $\mathcal{A}$ quello delle matrici antisimmetriche. Dimostrare che $\mathcal{A} = \mathcal{S}^\perp$.

c) Dimostrare che f e g coincidono rispettivamente con la proiezione ortogonale di V su $\mathcal{S}$ e su $\mathcal{A}$ e determinare una base ortonormale comune di autovettori per f e g.

Esercizio 4. Sia V un spazio vettoriale di dimensione 4 dotato del prodotto scalare non degenere ϕ. Sia v_1, v_2, v_3, v_4 un base di V tale che $v_1 \perp v_4$ e $v_3 \perp v_2$. Sia $f \in \mathcal{L}(V)$, l'endomorfismo dato da $f(v) = \phi(v_2, v)v_1 + \phi(v_4, v)v_3$, per ogni $v \in V$.

a) Mostrare che f è triangolabile.

b) Mostrare che $\mathrm{Ker}\, f = v_2^\perp \cap v_4^\perp$ e che esiste $w \in v_4^\perp$ tale che $\phi(v_2, w) = 1$.

c) Mostrare che f è diagonalizzabile se e solo se $\phi(v_1, v_2)\phi(v_3, v_4) \neq 0$.

d) Determinare la forma canonica di Jordan di f nel caso $\phi(v_1, v_2) = 0$, $\phi(v_3, v_4) \neq 0$.

Esercizio 5. Sia $C_{\mu,\alpha}, \mu, \alpha \in \mathbb{R}$, la conica $\mu(x-1)(y-1) + (x+y-1)(x+y-\alpha) = 0$.

a) Classificare $C_{1,0}$.

b) Dire per quali valori di $\mu, \alpha \in \mathbb{R}$ la conica $C_{\mu,\alpha}$ risulta essere una parabola.

Scrivere su tutti i fogli nome e numero di matricola.
Durata: 3 ore.