Anno Accademico 2022/2023
Seconda prova in itinere di Geometria 1 - 22/5/2023

Nel seguito, $\mathbb{K}$ è un campo e se V è uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$, indichiamo con $\mathcal{L}(V)$ lo spazio vettoriale degli endomorfismi di V. Per $n > 0$ intero, indichiamo con $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine n a coefficienti in $\mathbb{K}$.

Esercizio 1. Sia $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, e sia $f \in \mathcal{L}(V)$ l'endomorfismo dato da

$$\forall A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_4 & a_3 \end{bmatrix} \in V, \qquad f(A) \ = \ \begin{bmatrix} a_4 & a_1 \\ a_3 & a_2 \end{bmatrix}.$$

a) Per $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, e $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, dire (giustificando la risposta) se f è diagonalizzabile.
[sugg.: osservare che una potenza di f (quale?) è l'identità]

In generale, sia $\sigma \in \Sigma_4$ una permutazione e sia $f_\sigma \in \mathcal{L}(V)$ dato da

$$\forall A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_4 & a_3 \end{bmatrix} \in V, \qquad f_\sigma(A) \ = \ \begin{bmatrix} a_{\sigma(1)} & a_{\sigma(2)} \\ a_{\sigma(4)} & a_{\sigma(3)} \end{bmatrix}.$$

b) Dimostrare che, $\forall \sigma \in \Sigma_4$, f_σ è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$.

c) Caratterizzare, in termini della loro decomposizione in cicli, le $\sigma \in \Sigma_4$ per cui f_σ sia diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

Esercizio 2.

Siano $A, B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Determinare le segnature di A e di B.

b) Determinare una base di $Rad(A)$ e di $\{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 | \ {}^t\underline{x}B\underline{y} = 0 \ \forall \underline{y} \in Rad(A)\}$.

c) Mostrare che in $\mathrm{Span}(A, B)$ esistono matrici simmetriche definite positive e definite negative.

Esercizio 3. Per $n \geq 1$, sia $\omega_n = \cos(\frac{2\pi}{n}) + i \sin(\frac{2\pi}{n})$ una radice n-sima dell'unità e sia $V_n = \mathbb{C}_{n-1}[x]$.

Scrivere su tutti i fogli nome e numero di matricola.
Durata: 3 ore.

a) Dimostrare che il prodotto hermitiano $\varphi : V_n \times V_n \to \mathbb{C}$ definito da

$$\varphi(p(x), q(x)) = \sum_{k=0}^{n-1} \overline{p(\omega_n^k)} q(\omega_n^k)$$

è definito positivo.

b) Sia $n = 6$ e siano $f, g : V_6 \to V_6$ gli endomorfismi definiti da

$$f(p(x)) = p(x) + p(-x), \quad g(p(x)) = p(x) - p(-x), \quad \forall p(x) \in V_6.$$

Dimostrare che f e g sono hermitiani (autoaggiunti) e che $g \circ f = f \circ g = 0$.

c) Determinare autovalori e autospazi di f e g e determinare una base di V_6 di autovettori comuni per f e g.

Esercizio 4.
Sia $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$. Determinare i possibili valori di $\det(A)$ nei seguenti casi:

a) $A^3 + A = 2A^2$ e A è invertibile.

b) $A^3 + A = 2A^2$ e $\mathrm{tr}(A) = 2$.

c) $A^5 = A^2$ e $\mathrm{tr}(A) = 0$

d) $A^5 = A^2$ e $\mathrm{tr}(A) = 5$

[Suggerimento: determinare le possibili forme canoniche di Jordan reali di A]

Esercizio 5. Per ogni $\lambda.\mu \in \mathbb{R}$, non entrambi nulli, sia $C_{\lambda,\mu}$ la conica

$$C_{\lambda,\mu} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (\lambda + \mu)(x^2 + y^2) - 2xy(\lambda - \mu) - (\lambda + \mu) = 0\}.$$

a) Classificare $C_{\lambda,\mu}$ (al variare di λ e μ).

b) Sia $\mathcal{C}$ l'unione di tutti i centri delle $C_{\lambda,\mu}$. Dimostrare che $\mathcal{C}$ è una conica, scrivendone l'equazione.