Anno Accademico 2023/2024
Geometria 1 - primo compitino
20 /2/2024

Esercizio 1. Sia $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ avente matrice associata rispetto alla base canonica $\begin{bmatrix} -2 & 2 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

a) [2pti] Calcolare $rg(f)$.

b) [5pti] Calcolare basi per: $Ker(f),\ Im(f), Ker(f) + Im(f),\ Ker(f) \cap Im(f)$.

c) [4pti] Calcolare gli autovalori di f e dire (giustificandolo) se f è diagonalizzabile.

Esercizio 2. Sia $sgn{:}\mathbb{Z} \to \{-1, 0, 1\}$ definita da $sgn(k) = \begin{cases} 1 & se \quad k > 0, \\ -1 & se \quad k < 0 \\ 0 & se \quad k = 0 \end{cases}$. Definiamo $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ n \geq 1$ come la matrice data da $a_{ij} = sgn(i - j),\ i, j = 1, \dots, n$ (quindi A ha 0 sulla diagonale, -1 sopra e 1 sotto).

a) [4pti] Dimostrare che $det(A_n) = 0$ se n è dispari, $det(A_n) = 1$ se n è pari (può essere utile osservare che $A = -({}^tA)$).

b) [4pti] Calcolare $(A_4)^{-1}$.

Esercizio 3. Sia $V = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Sia $U = (u_{ij}) \in V$ la matrice tale che $u_{ij} = 1,\ \forall i, j = 1, \dots, n$, e sia $F : V \to \mathbb{K}$ data da $F(A) = tr(UA)$.

a) [3pti] Dimostrare che F è un funzionale su V.

b) [4pti] Sia $E_{ij},\ i, j = 1, \dots, n$ la base canonica di V , e sia $E^*_{ij}, i, j = 1, \dots, n$, la base duale di V^*. Esprimere F come combinazione lineare delle E^*_{ij}.

Esercizio 4. [5pti] Sia V spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Sia $f \in \mathcal{L}(V)$ diagonalizzabile, e sia $W \subset V$ un sottospazio $f-$invariante. Dimostrare che l'applicazione indotta

$$\overline{f} : V/W \to V/W$$

è diagonalizzabile.

(Può essere utile considerare la descrizione dei sottospazi invarianti di un endomorfismo diagonalizzabile e la proiezione sul quoziente $\pi : V \to V/W$)

Scrivere su tutti i fogli nome e numero di matricola.
Durata: 3 ore.