I compitino Geometria 19/1/2016

Nome e cognome (stampatello) ....

matricola..............................

Parte I *(per ogni quesito riempire col risultato o barrare la casella; fra parentesi quadre è indicato il valore della risposta esatta. Ogni risposta errata vale -1.)*

1. [pti 5] Dati i 4 punti in $\mathbb{R}^3$ di coordinate cartesiane ortogonali

$$A \equiv (1, 2, 0),\ B \equiv (2, -1, 0)\ C \equiv (1, 0, 2),\ D \equiv (0, 2, 1)$$

   (a) Scrivere le equazioni parametriche delle due rette r, s passanti rispettivamente per AB e per CD.

$$r : \begin{cases} \text{x=} \\ \text{y=} \\ \text{z=} \end{cases} \qquad\qquad s : \begin{cases} \text{x=} \\ \text{y=} \\ \text{z=} \end{cases}$$

   (b) Scrivere l'equazione di un piano Π contenente r e parallelo ad s.

. . . .

2. [pti 4] Dire quali di questi insiemi sono sottospazi vettoriali.

   (a) $Z_1 = \{A \in M_3(\mathbb{C}) \mid \mathrm{rk}A \leq 2\}$ $\boxed{\text{si}}$ $\boxed{\text{no}}$

   (b) $Z_2 = \{P \in \mathbb{R}^n \mid d(P, 0) = 1\}$ dove d è la distanza euclidea $\boxed{\text{si}}$ $\boxed{\text{no}}$

   (c) $Z_3 = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid p(1) = 0\}$ $\boxed{\text{si}}$ $\boxed{\text{no}}$

   (d) $Z_4 = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid p(0) = 1\}$ $\boxed{\text{si}}$ $\boxed{\text{no}}$

3. [pti 2] Scrivere tutte le soluzioni complesse di

$$z = \sqrt[3]{-8}$$

....

Parte II (scrivere su un foglio)

Esercizio 1

Considerare i tre vettori $v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$, $v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ -k \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^3$ dipendenti da un parametro $k \in \mathbb{R}$.

1. Determinare l'insieme $\Omega \subset \mathbb{R}$ di quei valori di k per cui i i tre vettori sono linearmente dipendenti.

2. Per ogni $k \in \Omega$, determinare una base B di $V_k := \mathrm{Span}\{v_1, v_2, v_3\}$; e scrivere inoltre equazioni cartesiane di V_k.

3. Determinare una base per lo spazio W dato dall'intersezione di tutti i V_k al variare di $k \in \Omega$.

Esercizio 2. Sia $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e sia $A \in V$. Sia poi $F_A : V \to V$ l'endomorfismo

$$F_A(X) = (tr(AX)) \cdot A \ + \ (tr({}^tAX)) \cdot {}^tA \ .$$

1. Dimostrare che F_A è lineare.

2. Calcolare la matrice associata ad F_A rispetto alla base canonica

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ; \ E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ; \ E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} ; \ E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   di V quando la matrice A è data da

$$A \ = \ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Siano $S,\ T \subset V$ i sottospazi delle matrici simmetriche e antisimmetriche rispettivamente. Dimostrare che S e T sono F_A-invarianti (cioè $F_A(S) \subset S,\ F_A(T) \subset T$) qualunque sia A.

4. *[facoltativo]* Dire qual è il massimo rango r che F_A può assumere e caratterizzare quelle A per cui $rg(F_A) < r$.