Anno Accademico 2022/2023
Geometria 1
16/2/2023
Prima prova in itinere

Nel seguito, $\mathbb{K}$ è un campo e per V, W spazi vettoriali sul campo $\mathbb{K}$, indichiamo con $\mathcal{L}(V, W)$ lo spazio vettoriale delle applicazioni lineari da V a W.
Per $n > 0$ intero, indichiamo con $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine n a coefficienti in $\mathbb{K}$. Per $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, indichiamo con $rg(A)$ il rango di A.

Esercizio 1.
Per $a \in \mathbb{R}$, sia $f_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, l'applicazione lineare data da

$$f_a(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x_1 + ax_2 + 2x_3 \\ 3x_1 + 6x_2 + (12-3a)x_3 \\ x_1 + ax_2 + 2x_3 \\ 3x_1 + (6a - a^2)x_2 + (9-a)x_3 \end{bmatrix} \quad \text{per ogni} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

a) Calcolare la dimensione di $\mathrm{Im}(f_2)$ e scrivere equazioni cartesiane per questo sottospazio.

b) Al variare di $a \in \mathbb{R}$, calcolare $\dim(\mathrm{Im}(f_a))$

c) Siano

$$\mathcal{F}_a = \{g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3) \mid \ g \circ f_a = 0\}, \quad \mathcal{G}_a = \{g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3) \mid \ f_a \circ g = 0\}.$$

Mostrare che, per ogni $a \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}_a$ e $\mathcal{G}_a$ sono sottospazi di $\mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$ e che $\mathcal{F}_a + \mathcal{G}_a$ è un sottospazio proprio: $\mathcal{F}_a + \mathcal{G}_a \neq \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$.

Esercizio 2.
Supponiamo $\mathbb{K}$ abbia almeno 3 elementi distinti $0, 1, \alpha$.
Sia $V = \mathbb{K}_2[x]$ e siano $L_i : V \to \mathbb{K}$, $i = 1, 2, 3$, i tre funzionali che valutano un polinomio rispettivamente in $0, 1, \alpha$.

a) Dimostrare che gli L_i sono linearmente indipendenti (e quindi sono una base dello spazio duale V^*).

b) Individuare la base $\mathcal{B}$ di V tale che la base duale $\mathcal{B}^*$ sia uguale a L_1, L_2, L_3.

c) Dimostrare che non tutti i funzionali in V^* sono della forma $L(p(x)) = \gamma p(\beta)$, per qualche $\gamma, \beta \in \mathbb{K}$.

Scrivere su tutti i fogli nome e numero di matricola.
Durata: 2 ore e 45 minuti.

Esercizio 3.
Sia $V = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Dimostrare che, se $f \in \mathcal{L}(V, V)$ è un endomorfismo di V tale che $rg(f(A)) < rg(A)$ per ogni $A \in V$, $A \neq 0$, allora $f = 0$.

Esercizio 4.
Per $z \in \mathbb{C}$, sia $A_z \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice il cui coefficiente di posto (i, j), vale $A_{ij} = z^{|i-j|}$, per ogni $i, j = 1, \dots, n$:

$$A_z = \begin{pmatrix} 1 & z & z^2 & \cdots & z^{n-2} & z^{n-1} \\ z & 1 & z & \cdots & z^{n-3} & z^{n-2} \\ z^2 & z & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ z^{n-2} & z^{n-3} & \cdots & \ddots & 1 & z \\ z^{n-1} & z^{n-2} & \cdots & \cdots & z & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Al variare di $z \in \mathbb{C}$, calcolare $\det(A_z)$ e $rg(A_z)$ (in funzione di z).

b) Per gli $z \in \mathbb{C}$ tali che A_z è invertibile, determinare la prima colonna di $(A_z)^{-1}$.