Nome e cognome (stampatello) ....

matricola.............................

I parte (tot. 15 punti)

La domanda 2) vale 3 punti in caso di risposta esatta, -1 se la risposta e' sbagliata, 0 se è lasciata. Le altre domande sono a risposta multipla: nel caso che la domanda preveda k risposte giuste, si totalizza 3/k punti per ogni risposta corretta; se c'e' qualche risposta sbagliata, si somma -1; si ottiene 0 se non si danno risposte.

1) L'equazione del piano passante per il punto $P \equiv (2, -1, 5)$ e contenente la retta r di equazioni cartesiane $\begin{cases} x+z+1 & = & 0 \\ 2x-y-3 & = & 0 \end{cases}$ è:

$\boxed{\text{A}}$ $7x - 4y - z = 13$ $\boxed{\text{B}}$ $4x + 7y + z = 6$ $\boxed{\text{C}}$ $7x + 4y + z = 15$
$\boxed{\text{D}}$ $7x + 13y + 2z = 11$ $\boxed{\text{E}}$ nessuna delle precedenti

2) Esibire due matrici $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ t.c.

$$(A+B)^2 \;\neq\; A^2 + 2AB + B^2$$

$$A = \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$$

3) Sia $\mathcal{A} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k\} \subset V$, con V spazio vettoriale di dimensione n. Allora $\mathcal{A}$ è linearmente dipendente se e solo se

$\boxed{\text{A}}$ $\forall i,\ \underline{v}_i \in\ Span(\mathcal{A} \setminus \{\underline{v}_i\})$;
$\boxed{\text{B}}$ $\exists \mathcal{A}' \subset \mathcal{A},\ \mathcal{A}' \neq \mathcal{A},$ tale che $Span(\mathcal{A}') = Span(\mathcal{A})$
$\boxed{\text{C}}$ $\exists i :\ \underline{v}_i \in\ Span(\mathcal{A} \setminus \{\underline{v}_i\})$
$\boxed{\text{D}}$ $k > n$
$\boxed{\text{E}}$ $dim(Span(\mathcal{A})) \ <\ \#\mathcal{A}$

4) Sia $V = \mathbb{R}_3[x]$ e sia $W = \{p(x) \in V \ :\ p(0) = 0\}$. Un supplementare di W in V è il sottospazio $U \subset V$ definito da:

$\boxed{\text{A}}$ $\{p(x) \in V : p(0) \neq 0\}$; $\boxed{\text{B}}$ $Span\{x + x^2 + x^3\}$ $\boxed{\text{C}}$ $Span\{1 + x + x^2\}$
$\boxed{\text{D}}$ $Span\{1 + x, -1 + x\}$ $\boxed{\text{E}}$ $\{p(x) \in V :\ p(1) = p(2) = p(3) = 0\}$

5) Sia $z = -2 + 2i \ \in \mathbb{C}$. Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione

$$w^3 = z$$

$w_1 =$ .... $w_2 =$ .... $w_3 =$ ....

Nome e cognome (stampatello) ....

Parte II (tot. 18 punti)

Esercizio 1. Sia $U = Span\{\underline{u}\}$, con $\underline{u} = (1, -1, 2) \in \mathbb{R}^3$. Sia

$$\Pi_\lambda = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \lambda x + (1-\lambda)y - z = 0\}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

1. Determinare i $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui $\mathbb{R}^3 = U \oplus \Pi_\lambda$.
2. Sia $\mathcal{F}_\lambda = \{f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : f(U) \subset U, \ f(\Pi_\lambda) \subset \Pi_\lambda\}$.
   (a) Dimostrare che $\mathcal{F}_\lambda$ è sottospazio vettoriale di $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.
   (b) Al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, calcolare la dimensione di $\mathcal{F}_\lambda$, caratterizzando la matrice associata ad una generica $f \in \mathcal{F}_\lambda$ rispetto a una base opportuna di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 2. Sia $\mathcal{V} = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, sia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{V}$$

e siano f e g le trasformazioni lineari di $\mathbb{R}^3$ in sé date da $f(\underline{x}) = A\underline{x}$ e $g(\underline{x}) = {}^tA\underline{x}$.

1. Calcolare basi ed equazioni cartesiane per $Ker(f), Im(f), Ker(g), Im(g)$.
2. Sia $\mathcal{D} = \{B \in \mathcal{V} : AB = 0\}$. Dimostrare che $\mathcal{D}$ è sottospazio vettoriale di $\mathcal{V}$ e calcolarne la dimensione e una base.
3. Stesse domande del punto 2 per $\mathcal{S} = \{B \in \mathcal{V} : BA = 0\}$ e per $\mathcal{S} \cap \mathcal{D}$.