Vettori geometrici II

Posizioni relative di rette e piani

1) Due piani Π, Π' possono essere:

(i) incidenti ($\Pi \cap \Pi'$ è una retta)

(ii) paralleli ($\Pi \cap \Pi' = \emptyset$)

(iii) coincidenti ($\Pi = \Pi'$)

Se Π ha equaz. cartesiana $ax+by+cz=d$ e Π' ha eq. $a'x+b'y+c'z=d'$ allora

(i) vale $\Leftrightarrow$ i due vettori normali (a,b,c), (a',b',c') non sono multipli

(ii) vale $\Leftrightarrow$ i vett. normali sono multipli ma le quaterne (a,b,c,d), (a',b',c',d') non sono multiple.

iii) vale se le due quaterne sono multiple.

<u>Esercizio</u> Discutere i 3 casi se π e π' sono dati in forma parametrica oppure uno è in forma parametrica e uno in forma cartesiana.

2) Una retta r e un piano π possono essere

(i) incidenti ($r \cap \pi$ è un punto)

(ii) paralleli ($r \cap \pi = \emptyset$)

(iii) r inclusa in π ($r \subset \pi$)

Se π è in forma cartesiana $ax+by+cz=d$ e r in forma parametrica $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\underline{v}$, allora:

(i) vale $\iff$ $\underline{v}$ non è parallelo a Π $\iff$ $\underline{v}$ non è ortogonale al vettore normale $\underline{n} \equiv (a, b, c)$ del piano $\iff$ $\langle \underline{v}, \underline{n} \rangle \neq 0$.

(ii) vale $\iff$ $\underline{v}$ è parallelo a Π e nessun punto di r sta in Π $\iff$ $\langle \underline{v}, \underline{n} \rangle = 0$ ma $\langle \underline{n}, \overrightarrow{OP_0} \rangle \neq d$ (le coordinate di P_0 non verificano l'equazione del piano).

(iii) vale $\iff$ $\langle \underline{v}, \underline{n} \rangle = 0$, $\langle \underline{n}, \overrightarrow{OP_0} \rangle = d$.

<u>Esercizio</u>. Considerare i vari casi in cui piano e retta sono dati in equazioni parametriche/cartesiane.

3) Due rette r, s possono essere:

(i) sghembe (non complanari)

(ii) incidenti ($r \cap s$ è un punto)

(iii) parallele (r e s sono complanari ma $r \cap s = \emptyset$)

(iv) coincidenti

Supponiamo che r e s siano date in forma parametrica:

$r: \ \vec{OP} = \vec{OP_0} + t\underline{v}$; $\quad s: \ \vec{OQ} = \vec{OQ_0} + s\underline{w}$. $\quad t, s \in \mathbb{R}$.

Partiamo da (iii): r, s sono parallele $\iff$ $\underline{v}$ è multiplo di $\underline{w}$ ma $Q_0 \notin r \iff \underline{v}, \underline{w}$ multipli e $\vec{P_0Q_0}$ non multiplo di $\underline{v}$.

(iv) $\iff$ $\underline{v}, \underline{w}$ multipli e $Q_0 \in r$ $\iff$ $\underline{v}, \underline{w}, \overrightarrow{P_0Q_0}$ tutti multipli (paralleli).

(ii) $\iff$ $\underline{v}, \underline{w}$ non multipli e i 3 vettori $\underline{v}, \underline{w}, \overrightarrow{P_0Q_0}$ complanari

(i) [caso generico] $\iff$ $\underline{v}, \underline{w}$ non multipli e i 3 vettori $\underline{v}, \underline{w}, \overrightarrow{P_0Q_0}$ non complanari $\iff$ $\underline{v}, \underline{w}, \overrightarrow{P_0Q_0}$ non complanari.

Nota: per il criterio numerico sopra trovato, se $\underline{v} \equiv (v_1, v_2, v_3)$, $\underline{w} \equiv (w_1, w_2, w_3)$, $P_0 \equiv (a, b, c)$, $Q_0 \equiv (a', b', c')$, allora r e s sono sghembe $\iff$

$$\begin{vmatrix} a'-a & b'-b & c'-c \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Proposizione Siano r, s sghembe, con equaz. parametriche rispettivamente

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\,\underline{v} \; ; \quad \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OQ_0} + k\,\underline{w}$$

Per $P \in r$, $Q \in s$, sia $\ell_{P,Q}$ la retta contenente P e Q.

Esistono unici $\bar{P} \in r$, $\bar{Q} \in s$, tali che

i) $\ell_{\bar{P}\bar{Q}}$ è ortogonale sia a r che a s

ii) $\mathrm{dist}(\bar{P}, \bar{Q}) = \min \{ \mathrm{dist}(P, Q) \mid P \in r, Q \in s \}$.

__dim__ Per $P \in r$, $Q \in s$, si ha:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{P_0Q_0} + k\,\underline{w} - t\,\underline{v}$$

Imponendo $\langle \overrightarrow{PQ}, \underline{v} \rangle = \langle \overrightarrow{PQ}, \underline{w} \rangle = 0$ si trova:

$$\begin{cases} -\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle t + \langle \underline{w}, \underline{v} \rangle k + \langle \overrightarrow{P_0Q_0}, \underline{v} \rangle = 0 \\ -\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle t + \langle \underline{w}, \underline{w} \rangle k + \langle \overrightarrow{P_0Q_0}, \underline{w} \rangle = 0 \end{cases}$$

Risolvendo si trova:

$$\begin{cases} \left(\langle \underline{v},\underline{v}\rangle \langle \underline{w},\underline{w}\rangle - \langle \underline{v},\underline{w}\rangle^2\right) t = \langle \overrightarrow{P_0Q_0}, \underline{v}\rangle \langle \underline{w},\underline{w}\rangle - \langle \overrightarrow{P_0Q_0}, \underline{w}\rangle \langle \underline{v},\underline{w}\rangle \\ \left(\langle \underline{v},\underline{v}\rangle \langle \underline{w},\underline{w}\rangle - \langle \underline{v},\underline{w}\rangle^2\right) k = \langle \overrightarrow{P_0Q_0}, \underline{v}\rangle \langle \underline{v},\underline{w}\rangle - \langle \overrightarrow{P_0Q_0}, \underline{w}\rangle \langle \underline{v},\underline{v}\rangle \end{cases} \qquad (*)$$

Per il momento assumiamo il

<u>Lemma</u> $\underline{v}, \underline{w}$ sono non multipli $\iff$

$$\begin{vmatrix} \langle \underline{v},\underline{v}\rangle & \langle \underline{v},\underline{w}\rangle \\ \langle \underline{v},\underline{w}\rangle & \langle \underline{w},\underline{w}\rangle \end{vmatrix} \neq 0$$

Dal lemma segue che t e k esistono unici (il sistema $(*)$ ha un'unica soluzione) e questo dimostra il punto (i) della proposizione.

Per il punto (ii) osserviamo che $\operatorname{dist}(P,Q)^2 = \|\overrightarrow{PQ}\|^2 = \langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ} \rangle$

Osservando che dati 3 punti A, B, C per la regola del parallelogramma si ha: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, si può scrivere:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P\bar{P}} + \overrightarrow{\bar{P}\bar{Q}} + \overrightarrow{\bar{Q}Q}$$

da cui: $\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ} \rangle = \langle \overrightarrow{P\bar{P}} + \overrightarrow{\bar{P}\bar{Q}} + \overrightarrow{\bar{Q}Q}, \overrightarrow{P\bar{P}} + \overrightarrow{\bar{P}\bar{Q}} + \overrightarrow{\bar{Q}Q} \rangle =$ [tenendo conto che $\overrightarrow{\bar{P}\bar{Q}}$ è ortogonale a $\overrightarrow{P\bar{P}}$ e a $\overrightarrow{\bar{Q}Q}$] $=$

$$= \langle \overrightarrow{\bar{P}\bar{Q}}, \overrightarrow{\bar{P}\bar{Q}} \rangle + \langle \overrightarrow{P\bar{P}} + \overrightarrow{\bar{Q}Q}, \overrightarrow{P\bar{P}} + \overrightarrow{\bar{Q}Q} \rangle = \|\overrightarrow{\bar{P}\bar{Q}}\|^2 + \|\overrightarrow{P\bar{P}} + \overrightarrow{\bar{Q}Q}\|^2 >$$

$> \|\overrightarrow{\bar{P}\bar{Q}}\|^2 = \mathrm{dist}(\bar{P}, \bar{Q})^2$ se $P \neq \bar{P}$ oppure $Q \neq \bar{Q}$,

che dimostra il punto (ii).

---

dim. lemma. Se ad esempio fosse $\underline{w} = \lambda \underline{v}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, allora

$$\begin{vmatrix} \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle & \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle \\ \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle & \langle \underline{w}, \underline{w} \rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle & \langle \underline{v}, \lambda \underline{v} \rangle \\ \langle \underline{v}, \lambda \underline{v} \rangle & \langle \lambda \underline{v}, \lambda \underline{v} \rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle & \lambda \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle \\ \lambda \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle & \lambda^2 \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle \end{vmatrix} = 0$$

Viceversa, sia $\begin{vmatrix} \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle & \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle \\ \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle & \langle \underline{w}, \underline{w} \rangle \end{vmatrix} = 0$; allora posto

$$\underline{u} = \langle \underline{w}, \underline{w} \rangle \underline{v} - \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle \underline{w},$$

se $\underline{v}$ e $\underline{w}$ non fossero multipli il vettore $\underline{u}$ sarebbe un vettore non nullo nel piano di $\underline{v}$ e $\underline{w}$, che risulta ortogonale sia a $\underline{v}$ che a $\underline{w}$:

$$\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = \langle \underline{w}, \underline{w} \rangle \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle - \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle^2 = 0$$

$$\langle \underline{u}, \underline{w} \rangle = \langle \underline{w}, \underline{w} \rangle \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle - \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle \langle \underline{w}, \underline{w} \rangle = 0$$

che è palesemente impossibile.

---

altra dim. del lemma. Si osservi:

$$\begin{vmatrix} \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle & \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle \\ \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle & \langle \underline{w}, \underline{w} \rangle \end{vmatrix} = \|\underline{v}\|^2 \|\underline{w}\|^2 - \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle^2 = \|\underline{v}\|^2 \|\underline{w}\|^2 - \left(\|\underline{v}\| \|\underline{w}\| \cos(\widehat{\underline{v}, \underline{w}}) \right)^2 =$$

$$= \|\underline{v}\|^2 \|\underline{w}\|^2 \operatorname{sen}^2(\widehat{\underline{v}, \underline{w}}) = \| \underline{v} \times \underline{w} \|^2$$

Come sappiamo, $\underline{v} \times \underline{w} = \underline{0} \iff \underline{v}$ e $\underline{w}$ sono multipli ■

Osservando che la proiezione ortogonale di un vettore $\underline{v}$ sulla retta di direzione $\underline{w}$ è: $\left\langle \underline{v}, \frac{\underline{w}}{\|\underline{w}\|} \right\rangle$ si trova:

distanza tra due rette r, s

$$d = \frac{|\langle \overrightarrow{P_0 Q_0}, \underline{v} \times \underline{w} \rangle|}{\| \underline{v} \times \underline{w} \|}$$

distanza di un punto da un piano

$$d = \frac{|a x_0 + b y_0 + c z_0 - d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|\langle \underline{n}, \overrightarrow{OP_0} \rangle - d|}{\| \underline{n} \|}$$

distanza di un punto P da una retta

$$d = \frac{\| \overrightarrow{P_0 P} \times \underline{v} \|}{\| \underline{v} \|}$$