Soluzione compitino 21/4/2015 – II parte

Esercizio 1.

1. ad es. $f(\underline{e}_i) = i\,\underline{e}_i$, $i = 1, 2, 3$, dove $\mathcal{B} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ è la base canonica.

2. L'intersezione di due sottospazi invarianti è invariante, quindi $\underline{e}_3$ è autovettore. Segue:

$$f(V) \subset V \iff f(\underline{e}_1) = \alpha\,\underline{e}_1 + \beta\,\underline{e}_3 , \quad \text{e}$$

$$f(W) \subset W \iff f(\underline{e}_2) = \gamma\,\underline{e}_2 + \delta\,\underline{e}_3$$

dove $\alpha, \dots, \delta \in \mathbb{R}$ sono qualunque. La matrice associata a f rispetto a $\mathcal{B}$ è:

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 \\ \beta & \delta & \varepsilon \end{bmatrix}.$$

Quindi $\dim(\mathcal{J}) = 5$

3. $f|_V$ diagonalizzabile $\iff$ V ha base di autovettori per $f|_V$ (e quindi per f)

$f|_W$ 〃 W 〃 $f|_W$ 〃

Siano $\underline{v}, \underline{v}' \in V$ autovettori distinti.

Siccome $\underline{e}_3$ è autovettore, posso scegliere uno di due (ad es $\underline{v}$) uguale a $\underline{e}_3$ (esercizio!)

Lo stesso ragionamento per due autovettori $\underline{w}$, $\underline{w}' \in W$, per cui posso prendere $\underline{w} = \underline{e}_3$.

Allora $\underline{e}_3, \underline{v}', \underline{w}'$ è base di autovettori di V.

Esercizio 2

$$\begin{array}{cccc} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 \\ \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel \end{array}$$

1. le basi canoniche sono $\mathcal{B}=\{1, x, x^2, x^3\}$ e $\mathcal{C}=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$

Se $p(x)\equiv 1$ allora $p(M)=I=E_1+E_4$ qualunque sia M,

$p(x)=x$ " $p(M_\alpha)=M_\alpha=E_1+\alpha E_2+E_4$

$p(x)=x^2$ " $p(M_\alpha)=M_\alpha^2=\begin{pmatrix}1&2\alpha\\0&1\end{pmatrix}=E_1+2\alpha E_2+E_4$

$p(x)=x^3$ " $p(M_\alpha)=M_\alpha^3=\begin{pmatrix}1&3\alpha\\0&1\end{pmatrix}=E_1+3\alpha E_2+E_4$

quindi

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi_\alpha)=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&\alpha&2\alpha&3\alpha\\0&0&0&0\\1&1&1&1\end{bmatrix}$$

2. $p(x)=1 \Rightarrow \psi\circ\varphi_\alpha(p(x))=\psi(I)=x^3+1$

$p(x)=x \Rightarrow \psi\circ\varphi_\alpha(p(x))=\psi(M_\alpha)=x^3+\alpha x^2+1$

$$p(x)=x^2 \Rightarrow \psi\circ\varphi_\alpha(p(x)) = \psi\left(\begin{pmatrix}1 & 2\alpha\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) = x^3+2\alpha x^2+1$$

$$p(x)=x^3 \Rightarrow \psi\varphi_\alpha(p(x)) = \psi\left(\begin{pmatrix}1 & 3\alpha\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) = x^3+3\alpha x^2+1$$

Quindi la matrice

associata a $\psi\circ\varphi_\alpha$ rispetto a $\mathcal{B}$ è:

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \alpha & 2\alpha & 3\alpha\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

3 (facoltativo). Se $m<n$ $\dim V = m+1 \leq n$,

e $\operatorname{rg} f \leq \dim V$ per teo. delle dimensioni.

Sia allora $m \geq n$. Allora V contiene il polinomio caratteristico $p_M(x)$ di M, che ha grado n.

Per il teo di Hamilton-Cayley $p_M(M) = 0$ quindi

$\forall$ polinomio $q(x)$ di grado $\leq m-n$ si ha che

$P(x) = p_M(x)\, q(x)$ verifica $P(M) = p_M(M)\, q(M) =$
$= 0$.

Ne deriva $\dim \ker \varphi_M \geq m-n+1$ $\left(= \dim \mathbb{R}_{m-n}[x]\right)$

e quindi $\operatorname{rg} \varphi_M = \dim V - \dim \ker \varphi_M \leq$

$$\leq m+1-(m-n+1) = n$$