1. In $\mathbb{R}^2$, si dica, al variare di $m \in \mathbb{R}$, se é possibile decomporre il vettore $\vec{e}_2 = (0,1)$ secondo le direzioni date dalla retta $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = mx\}$ e dalla retta V passante per l'origine e avente la direzione del vettore $\vec{e}_1 = (1,0)$, e, in caso affermativo, se ne dia un'esplicita decomposizione.

2. Sia U la retta per l'origine di $\mathbb{R}^3$ individuata dal vettore "torre di Pisa" $\vec{T} = (3,0,50)$ e sia V il piano orizzontale $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = 0\}$. Si decomponga un generico vettore $\vec{w} = (x,y,z)$ secondo le direzioni di U e di V.

3. Sia $W_\lambda \ = \ \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + \lambda y - (2+\lambda)z \ = \ 0 \ \}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Ogni W_λ è un piano per l'origine. Dimostrare che
   (a) il sottospazio $C = \begin{cases} x - 2z & = \ 0 \\ y - z & = \ 0 \end{cases}$ è contenuto in ogni W_λ
   (b) C é una retta, data in forma cartesiana; trovarne una equazione parametrica
   (quindi al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ i W_λ costituiscono un "fascio di piani" il cui "centro" è la retta C).
   (c) Sia U la retta dell'esercizio 2.
   Dire per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha $\mathbb{R}^3 = U \oplus W_\lambda$.

4. Sia $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 2x - y + z = 0\}$ e sia W_λ come nell'esercizio precedente.
   (a) Decomporre il vettore $\vec{v} = (1,2,3)$ secondo le direzioni di V e di W_λ. La decomposizione è unica in questo caso?
   (b) Dimostrare che, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, l'intersezione $V \cap W_\lambda$ è una retta e trovarne un'equazione parametrica.

5. Sia $V_\mu \ := \ \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ (2-3\mu)x - (1+\mu)y + z \ = \ 0\}$.
   (a) Determinare le equazioni cartesiane e parametriche del centro del fascio V_μ (vedi es. 3).
   (b) Determinare λ e μ in modo che risulti $W_\lambda = V_\mu$.

6.