Svolgimento esercizio del 14/9/2020

1. Per ipotesi $\varphi(v,w) = \varphi(f(v), f(w)) \quad \forall v, w \in V$.

Allora se $f(v) = 0$ si ha $\varphi(f(v), f(w)) = \varphi(0, f(w)) = 0$

$\forall w$, quindi $\varphi(v,w) = 0 \ \forall w$, cioè $v \in V^\perp$, e $V^\perp = \{0\}$

per ipotesi. Quindi $v = 0$.

2. Si ha: $\forall v, w \in V$:

$${}^t[v]_{\mathcal{B}} A [w]_{\mathcal{B}} = {}^t(M[v]_{\mathcal{B}}) A (M[w]_{\mathcal{B}}) =$$

$$= {}^t[v]_{\mathcal{B}} {}^t M A M [w]_{\mathcal{B}}.$$

Segue (come visto a lezione) che $A = {}^t M A M$.

[Se due matrici A, B sono tali che ${}^t x A y = {}^t x B y$, $\forall x, y$ $\Rightarrow A = B$].

3. Se $f, g \in O_{p,q} \Rightarrow \forall v, w \in V$ si ha:

$$\varphi(v,w) \overset{\uparrow}{=} \varphi(f(v), f(w)) \overset{\uparrow}{=} \varphi(g(f(v)), g(f(w)))$$

perché f è φ-ortogonale; perché g è φ-ortogonale

e quindi $g \circ f \in O_{p,q}$.

Se $f \in O_{p,q}$, si è già visto che f è invertibile, cioè $\exists f^{-1}$.

Allora $\varphi(f^{-1}(v), f^{-1}(w)) \overset{\uparrow}{=} \varphi(f(f^{-1}(v)), f(f^{-1}(w))) = \varphi(v,w)$

f φ-ortogonale

$\forall v, w \in V$, quindi $f^{-1} \in O_{p,q}$.

4. Fissiamo base "di Sylvester" $\mathcal{B}$ in modo che $M_{\mathcal{B}}(q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Per 2 segue; prendo $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ una matrice di una $f \in O_{1,1}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -c \\ b & -d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a^2 - c^2 & ab - cd \\ ab - cd & b^2 - d^2 \end{bmatrix}$$

che dà le equazioni:

$$\begin{cases} a^2 - c^2 = 1 \\ ab - cd = 0 \\ b^2 - d^2 = -1 \end{cases}$$

da cui:

$$a^2 = c^2 + 1 \qquad a^2 b^2 = c^2 d^2 = (c^2+1)(d^2-1)$$
$$b^2 = d^2 - 1 \qquad \text{da cui:}$$

$$1 - \frac{1}{d^2} = \frac{c^2}{c^2+1} \Rightarrow \frac{1}{d^2} = \frac{1}{c^2+1} \Rightarrow d^2 = c^2+1 = a^2$$
$$b^2 = c^2$$

Quindi le M con $\det M = 1$ hanno le forme:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{c^2+1} & c \\ c & \sqrt{c^2+1} \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} -\sqrt{c^2+1} & c \\ c & -\sqrt{c^2+1} \end{bmatrix} \qquad e \qquad u = (1,1)$$
$$v = (1,-1)$$

sono autovettori (con autovalori $\sqrt{c^2+1} + c$, $\sqrt{c^2+1} - c$ e $c - \sqrt{c^2+1}$, $c + \sqrt{c^2+1}$ rispettivamente)

mentre le M con $\det M = -1$ hanno la forma:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{c^2+1} & c \\ -c & -\sqrt{c^2+1} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} -\sqrt{c^2+1} & -c \\ c & \sqrt{c^2+1} \end{bmatrix}$$

con polinomio caratteristico $\lambda^2 - 1$ e quindi autovalori ± 1.
Si vede subito che $(1,1)$ e $(1,-1)$ non sono autovettori e quindi gli autovettori non sono isotropi.