05/03/2022 - *Secondo Compitino di Geometria (corso A)*

Nome e cognome (stampatello) ....

Matricola.............................

Parte I. *Per ogni quesito riempire con la soluzione lo spazio di questo foglio o il campo del form adibito a ricevere la risposta.*

1. Date $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, calcolare:

   a) $det(A \cdot B^t) =$ ....

   b) $det(B^t \cdot A) =$ ....

2. Sia $f_{\theta,r}$ la rotazione in $\mathbb{R}^3$ di angolo $\theta \in (0, 2\pi)$ rispetto alla retta r.

   a) Se $r = Span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\}$, determinare per quale valore di θ l'endomorfismo $f_{\theta,r}$ è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ e calcolare una base di autovettori

   $\theta =$ ...., $\begin{pmatrix} \dots\dots \\ \dots\dots \\ \dots\dots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dots\dots \\ \dots\dots \\ \dots\dots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dots\dots \\ \dots\dots \\ \dots\dots \end{pmatrix}.$

   b) Detta $A_{\theta,r}$ la matrice associata a $f_{\theta,r}$ in base canonica, scrivere una formula per $tr(A_{\theta,r}) - det(A_{\theta,r})$, al variare di θ ed r

   ....

3. Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -11 & 6 & 1 \\ 8 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

   a) Calcolare il polinomio caratteristico di A: ....

   b) Calcolare molteplicità algebriche e geometriche degli autovalori di A:

   ....

   c) Trovare una matrice P che diagonalizza A oppure, se ciò non è possibile, una matrice Q che triangolarizza A:

   $P = \begin{pmatrix} \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \end{pmatrix}$

4. Sia $A_{x,y} = \begin{pmatrix} x & y & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Trovare il polinomio minimo di $A_{x,y}$ quando:

   a) $x = 0, y = 1$: ....

   b) $x = 1, y = 0$: ....

   c) $x = y = 1$: ....

5. Può esistere un endomorfismo non diagonalizzabile di $\mathbb{R}^3$ che risulti diagonalizzabile se ristretto al piano invariante $z = 0$? Darne un esempio esplicitandone la matrice associata in base canonica oppure scrivere "NO":

   $\begin{pmatrix} \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \end{pmatrix}$ ....

Parte II. *Giustificare la risposta in un foglio. Se a distanza, dopo aver scritto su carta la soluzione in maniera ordinata, caricarne sul form le foto.*

Esercizio 1. Date due matrici $A,\ B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ il loro *commutatore* $[A, B]$ è la matrice
$$[A, B] = AB - BA.$$
Sia $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Determinare tutte le matrici $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tali che $[H, X] = 0$.
2. Determinare due matrici $X, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tali che
$$[H, X] = 2X \tag{1}$$
$$[H, Y] = -2Y \tag{2}$$
e dire se X e Y sono nilpotenti (cioè una loro potenza è la matrice nulla).
3. Siano ora $H,\ X,\ Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matrici tali che H è diagonalizzabile e valgono le relazioni (1), (2).

   Dimostrare che se $\underline{v}$ è un autovettore per H relativo all'autovalore λ allora $X(\underline{v})$ è un autovettore di H per l'autovalore $\lambda + 2$ e $Y(\underline{v})$ è autovettore di H per l'autovalore $\lambda - 2$.
4. Dedurre che X e Y sono nilpotenti.
5. Dedurre anche che tutti gli autovalori di H sono interi.