04/12/2021 - *Primo Compitino di Geometria (corso A)*

Parte I. *Per ogni quesito riempire con la soluzione il campo del form adibito a ricevere la risposta.*

1. Sia $\alpha = -1 + i\sqrt{3}$. Calcolare α^9.

2. Considerati i piani $\pi_1 : k\,x + y + z = k$, $\pi_2 : x - y + 2z = 1$ e $\pi_3 : x + ky - kz = 1$, determinare per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ l'intersezione $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$ esiste, è un punto oppure è una retta.

3. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, sia $W = \{X \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : A\,X = X\,A\}$ sottospazio di $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Rispondere alle seguenti domande:

   a) Trovare una base di W.

   b) Dire se $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) = W \oplus \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\}$, e giustificre brevemente la risposta.

4. Fissato un generico $n \in \mathbb{N}$, rispondere alle seguenti domande giustificando brevemente la risposta:

   a) $\{p(x) \in \mathbb{R}_n[x] : \exists\, a \in \mathbb{R} \text{ con } p(a) = 0\}$ è sottospazio di $\mathbb{R}_n[x]$? Calcolarne eventualmente la dimensione.

   b) $\{p(x) \in \mathbb{R}_n[x] : p(0) = p(1)\}$ è sottospazio di $\mathbb{R}_n[x]$? Calcolarne eventualmente la dimensione.

   c) Dire se $\{(x-1)^k : k = 1, 2, ..., n\}$ è base per il sottospazio $\{p(x) \in \mathbb{R}_n[x] : p(1) = 0\}$ di $\mathbb{R}_n[x]$?

5. Fissato un generico $n \in \mathbb{N}$, sia $f : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}^{n+1}$ l'applicazione lineare tale che $f(p(x)) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \\ \vdots \\ p(n) \end{pmatrix}$. Giustificando brevemente le risposte, rispondere alle seguenti domande:

   a) Descrivere il $\ker(f)$ e dire quindi se è vero che $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^{n+1}$.

   b) Per $n = 2$, scrivere la matrice A della applicazione f, rispetto alle basi canoniche $\{1, x, x^2\}$ di $\mathbb{R}_n[x]$ e $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ di $\mathbb{R}^{n+1}$.

   c) Calcolare A^{-1}, dove A è la matrice determinata al punto (b).

Parte II. *Giustificare la risposta in un foglio: dopo aver scritto su carta la soluzione in maniera ordinata, caricarne sul form le foto.*

Esercizio 1.

1. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare che è rappresentata, rispetto alle basi canoniche in partenza ed in arrivo, dalla matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & -7 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$
Esibire una base $\mathcal{B}_1$ di $\mathrm{Im}(f)$ ed estenderla ad una base $\mathcal{B}_2$ di $\mathbb{R}^4$ (si chiede cioè di trovare una base $\mathcal{B}_2$ di $\mathbb{R}^4$ i cui primi vettori siano quelli di $\mathcal{B}_1$). Scrivere poi la matrice di f rispetto alla base canonica in partenza e alla base $\mathcal{B}_2$ in arrivo.

2. Se f e $\mathcal{B}_2$ sono quelle del punto (1), esibire una base $\mathcal{A}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che
$$M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Siano V, W due spazi vettoriali di dimensioni rispettive n, m, e sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare di rango r. Dimostrare che è possibile scegliere una base $\mathcal{A}$ di V e una base $\mathcal{B}$ di W in modo che la matrice $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f)$ sia
$$M_r := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$
ovvero la matrice con m righe ed n colonne in cui le righe $i = 1, \ldots, r$ hanno un solo coefficiente non nullo, pari ad 1 e collocato sulla colonna i, e le righe dalla $r+1$ alla m sono nulle.

4. Dati due spazi vettoriali U, Z sia $\mathcal{L}(U, Z)$ lo spazio vettoriale delle applicazioni lineari da U a Z. Determinare la dimensione dell'immagine e del nucleo dell'applicazione lineare
$$\begin{array}{rccc} L: & \mathcal{L}(V, V) & \to & \mathcal{L}(V, W) \\ & g & \mapsto & f \circ g. \end{array}$$

Esercizio 2. Sia A una matrice 3×3 a coefficienti reali il cui nucleo è $\mathrm{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Consideriamo poi la matrice $B = \begin{pmatrix} 3 & 25 & 3 \\ 4 & 24 & 23 \\ 4 & 25 & 21 \end{pmatrix}$, con inversa $B^{-1} = \begin{pmatrix} 71 & 450 & -503 \\ -8 & -51 & 57 \\ -4 & -25 & 28 \end{pmatrix}$.

1. Determinare una base per il nucleo di BA.

2. Determinare una base per il nucleo di AB^{-1}.