Compito di Geometria I - 31/1/2018

Nome e cognome (stampatello) ....

matricola..............................

I parte

Per ogni quesito spuntare una (sola) casella o riempire col risultato (dove richiesto); -1 per ogni risposta errata.

1) .

- Un'equazione parametrica della retta r di $\mathbb{R}^3$ giacente nel piano xy e che biseca gli assi x ed y è:

$$r : \begin{cases} x = \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y = \ldots\ldots\ldots\ldots \\ z = \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

- L'equazione cartesiana del piano Π passante per r e per l'analoga retta s giacente nel piano xz e che biseca gli assi x e z è

Π : ....

2) Se due matrici quadrate A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico allora

1. A è diagonalizzabile se e solo se B lo è | si | no |

   in caso negativo fare un controesempio:

   $A =$ $\qquad\qquad$ $B =$

2. A è invertibile se e solo se B lo è | si | no |

   in caso negativo fare un controesempio:

   $A =$ $\qquad\qquad$ $B =$

3) Sia φ un prodotto scalare in $\mathbb{R}^4$ di segnatura $(3, 1, 0)$. Allora:

- L'insieme $\{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 : \varphi(\underline{x}, \underline{x}) \leq 0\}$ non può contenere un sottospazio di dimensione 2 | vero | falso |

- Se $\varphi(\underline{x}, \underline{x}) > 0$ e $\varphi_(\underline{y}, \underline{y}) > 0$, con $\underline{x} \neq \underline{y}$, allora $\varphi_{|Span(\underline{x},\underline{y})} > 0$ | vero | falso |

- Se $\varphi(\underline{x}, \underline{x}) < 0$ e $\varphi_(\underline{y}, \underline{y}) > 0$, allora $\exists \underline{z} \in Span(\underline{x}, \underline{y})$, $\underline{z} \neq 0$, con $\underline{z}$ isotropo. | vero | falso |

4)

1. Descrivere tutte le soluzioni complesse dell'equazione

$$z^2 - \overline{z}^2 \;=\; i$$

disegnandone anche il luogo di zeri nel piano complesso

.

2. Dimostrare qui che per ogni $n \in \mathbb{Z}$ e per ogni numero complesso z il numero

$$z^n - \overline{z}^n$$

è immaginario puro

.

(risolvere su un foglio)

Esercizio 1. Sia $\underline{u} \in \mathbb{R}^3$ un vettore di norma 1 rispetto al prodotto scalare canonico. Sia $f_{\underline{u}}$ l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ dato dalla rotazione di angolo $\pi/2$ rispetto all'asse determinato dal vettore $\underline{u}$, nel senso della mano destra (con pollice che punta come $\underline{u}$: si noti quindi che $f_{-\underline{u}} = f_{\underline{u}}^{-1}$ è la rotazione opposta rispetto allo stesso asse).

1. Sia $\underline{u} \equiv (0, -1, 0)$.
   (a) Determinare la matrice associata a $f_{\underline{u}}$ rispetto alla base canonica e_1, e_2, e_3 di $\mathbb{R}^3$.
   (b) Determinare tutti gli autovalori di $f_{\underline{u}}$ e discuterne la diagonalizzabilità su $\mathbb{R}$ e su $\mathbb{C}$.
   (c) Dimostrare che $f_{\underline{u}}$ è una trasformazione ortogonale con determinante positivo rispetto al prodotto canonico (quindi sta nel gruppo $SO(3)$).
2. Si dimostri che, $\forall \underline{u}$ con $||\underline{u}|| = 1$, si ha
$$f_{\underline{u}}(\underline{v}) \ = < \underline{v}, \underline{u} > \underline{u} + \underline{u} \times \underline{v}, \quad \underline{v} \in \mathbb{R}^3$$
   dove $< \, , \, >$ è il prodotto scalare canonico e $\times$ è il prodotto vettoriale tra vettori di $\mathbb{R}^3$ (si suggerisce di decomporre $\underline{v}$ rispetto a $\mathbb{R}^3 = Span(\underline{u}) \oplus Span(\underline{u})^{\perp}$).
3. Sia $e_1, \ e_2, \ e_3$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Descrivere geometricamente (indicandone asse e angolo di rotazione) la trasformazione composta $f_{e_1} \circ f_{e_2}$.

   [facoltativo] Dimostrare che il sottogruppo di $SO(3)$ ottenuto componendo in tutti i modi le potenze positive e negative delle f_{e_i} (ammettendo ripetizioni) è costituito da 24 elementi ed indicarne un isomorfismo (=corrispondenza biunivoca che conserva i prodotti) col gruppo simmetrico Σ_4.