Compito di Geometria I - 22/6/2018

Nome e cognome (stampatello) ....
matricola.............................

I parte

Per ogni quesito spuntare una (sola) casella o riempire col risultato (dove richiesto)

Test. Totale: 22 punti.

1. (2 punti) Fissato $a \in \mathbb{R}$, sia r_a la retta di equazione cartesiana

$$\begin{cases} x - ay - 2z = -1 - 4a - a^2 \ , \\ 2x + ay - z = 1 - 2a + a^2 \ , \end{cases}$$

e sia π_a il piano di equazione parametrica $(x, y, z) = (-1, 0, 0) + s\,(1, 1, 0) + t\,(-3a, 0, 1)$. Scrivere qui sotto la posizione reciproca di r_a e π_a al variare del parametro a.

. . . .

2. (2 punti) Scrivere qui sotto tutte le soluzioni complesse dell'equazione $z^3 - 3z^2 + 3z - i - 1 = 0$

. . . .

3. (4 punti) Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Calcolare il determinante di AB: ....

(b) Calcolare il determinante di BA: ....

4. (6 punti) (a) Sia φ il prodotto scalare definito positivo su $\mathbb{R}^3$ per cui una base ortonormale è data da $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Determinare la matrice di φ rispetto alla base canonica:

(b) Sia ϕ un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$. Sappiamo che: (i) esiste un sottospazio W di $\mathbb{R}^3$ tale che $\dim(W) = \dim(W^\perp) = 2$ (ortogonale preso rispetto a ϕ); (ii) esistono due vettori v_1, v_2 tali che $\phi(v_1, v_1) = \phi(v_2, v_2) = 0$ e $\phi(v_1, v_2) = 1$. Scrivere qui la terna $(\iota_+(\phi), \iota_-(\phi), \iota_0(\phi))$ oppure "non si può determinare": ....

(c) Sia ϕ come al punto precedente. Quanto vale, come massimo, $\dim(U \cap U^\perp)$, al variare di U fra tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2? ....

5. (4 punti) Sia A una matrice 3×3 a coefficienti reali. Si sa che $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$, che $\det(A) = 3$ e che $\mathrm{tr}(A) = 5$.

   (a) Determinare il polinomio caratteristico di A: ....

   (b) A è diagonalizzabile? ☐ Si ☐ No ☐ Non è possibile determinarlo

6. (4 punti) Consideriamo la seguente matrice M_a, dipendente da un parametro $a \in \mathbb{R}$:

$$M_a = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -3 & -a^2 & a^2+1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare, in funzione di a, gli autovalori di M_a: ....

   (b) Scrivere qui i valori di a per i quali M_a **non** Ã¨ diagonalizzabile su $\mathbb{R}$: ....

(risolvere su un foglio)

Esercizio 1. (Totale:11 punti)

Sia $V = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \ A =^t A\}$ e sia $P \in O_n$. Sia inoltre $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ il prodotto scalare $\varphi(A, B) = tr(^tAB)$.

1. Dimostrare che l'applicazione $f_P(A) =^t PAP$ è un endomorfismo di V.
2. Dimostrare che f_P è ortogonale rispetto al prodotto φ.
3. Quando $n = 2$ e $P = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix}$ dimostrare che f_P è una rotazione ortogonale in V rispetto all'asse $Span(Id)$ (dove Id è la matrice identità), specificandone l'angolo di rotazione.
4. Quando $n = 2$ e P è anche simmetrica, dimostrare che anche f_P lo è e calcolare gli autovalori di f_P in termini della segnatura di P.