**9/5/2017** - *III compitino Geometria*

Nome e cognome (stampatello) ......................................................................

matricola.............................

**Parte I**. *Per ogni quesito spuntare la casella o riempire col risultato (dove richiesto)*

1. (6 punti) Sia $A$ la matrice $\begin{pmatrix} 1 & i & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Siano inoltre $B = A + A^*$ e $C = AA^*$.

   a) $A$ è diagonalizzabile (su $\mathbb{C}$)? ☐ Diagonalizzabile ☐ Non diagonalizzabile
   b) $B$ è diagonalizzabile (su $\mathbb{C}$)? ☐ Diagonalizzabile ☐ Non diagonalizzabile
   c) $C$ è diagonalizzabile (su $\mathbb{C}$)? ☐ Diagonalizzabile ☐ Non diagonalizzabile

2. (6 punti) Sia $\varphi$ il prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ rappresentato dalla matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

   a) Determinare la segnatura di $\varphi$: scrivere $(i_+, i_-, i_0) =$ .....................

   b) Determinare, se esiste, un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ non nullo e tale che la restrizione di $\varphi$ a Span$(v)$ sia definita negativa. Scrivere le coordinate di $v$ oppure "non esiste":

3. (6 punti) Sia $B = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.

   Determinare matrici $P$ e $D$, con $P^t = P^{-1}$ e $D$ diagonale, tali che $B = P \cdot D \cdot P^{-1}$.

   $D =$ $P =$

4. (4 punti) Sia $V$ spazio vettoriale con prodotto scalare $\varphi$ e sia $W \subset V$ un sottospazio. Supponiamo: i) $V = W + W^\perp$; ii) $\varphi$ degenere su $W$. Possiamo concludere che $\varphi$ sia degenere su $V$? Nello spazio assegnato qui sotto, dimostrarlo oppure dare un controesempio.

   ...........................................................................................

   ...........................................................................................

5. (4 punti) Trovare, se esiste, una base ortonormale per lo spazio $V = \mathbb{R}_2[x]$ rispetto al prodotto scalare $\phi(p,q) = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$. Scrivere qui sotto la base oppure "non esiste".

   ...........................................................................................

   ...........................................................................................

**Parte II** *(Scrivere su un foglio)*

**Esercizio 1** (12 punti). Sia $V = \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ e consideriamo la forma bilineare

$$\varphi : V \times V \to \mathbb{C}, \quad \phi(M_1, M_2) = \mathrm{tr}(M_1^* M_2)$$

che fornisce un prodotto hermitiano su $V$ (non si richiede di dimostrare questa affermazione).

1. Dimostrare che $\varphi$ è definito positivo.

2. Sia $W \subset V$ il sottospazio $W = \{M \in V : \; tr(M) = 0\}$. Determinare una base per l'ortogonale $W^{\perp}$.

3. Data una matrice $A \in V$, denotiamo $f_A$ l'applicazione lineare

$$f_A : V \to \mathrm{M}_2(\mathbb{C}), \quad f_A(M) = AM - MA.$$

   Dimostrare che se $A = A^*$ allora $f_A$ è operatore hermitiano.

4. Quando $A = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$ determinare gli autovalori di $f_A$.

5. Dimostrare che, in generale, $f_A$ è hermitiano se e solo se $A - A^* \in W^{\perp}$.