Compito di Geometria I - 10/1/2018

Nome e cognome (stampatello) ....

matricola..............................

I parte

Per ogni quesito spuntare una (sola) casella o riempire col risultato (dove richiesto); 1 punto per ogni risposta giusta; -1 per ogni risposta errata.

1) Siano $P \equiv (-1,-1,-1)$, $Q \equiv (1,0,2)$, $R \equiv (0,1,1)$ punti in $\mathbb{R}^3$.

- L'equazione cartesiana del piano passante per i 3 punti dati è:

....

- Il coseno dell'angolo formato dalla normale a questo piano e dall'asse x è:

....

2) Se il polinomio caratteristico della matrice complessa A è dato da $p(\lambda) = \lambda^2 - i$ ($i \in \mathbb{C}$ è l'unità immaginaria) allora

- A è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$ | si | no |

  e in caso affermativo la forma diagonale di A è la matrice:

- A è invertibile | si | no |

  e in caso affermativo la forma diagonale di A^{-1} è la matrice:

3) Sia φ un prodotto scalare in $\mathbb{R}^3$ e siano $V,\ W \subset \mathbb{R}^3$ sottospazi di dimensione 2 tali che $V + W = \mathbb{R}^3$.

- Non può essere simultaneamente $\varphi_{|V} > 0$ e $\varphi_{|W} < 0$ | vero | falso |

- Se $\varphi_{|V} > 0$ e $\varphi_{|W} > 0$ allora φ è definito positivo | vero | falso |

(risolvere su un foglio)

Esercizio 1. Sia $\underline{v} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\underline{0}\}$ e sia $f_{\underline{v}}$ l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ dato dalla riflessione ortogonale (rispetto al prodotto canonico) rispetto al piano ortogonale a $\underline{v}$.

1. Scrivere la matrice associata a $f_{\underline{v}}$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$, quando $\underline{v} \equiv (1, -1, 0)$.

2. Dimostrare che $f_{\underline{v}}$ è diagonalizzabile per ogni $\underline{v}$, e indicarne gli autovalori e una base di autovettori.

3. Dire sotto quali condizioni su $\underline{u}$, $\underline{v}$ gli endomorfismi $f_{\underline{u}}$, $f_{\underline{v}}$ si possono diagonalizzare simultaneamente.

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{C}_2[x]$ e sia $\varphi : V \times V \to \mathbb{C}$ dato da

$$\varphi(p(x), q(x)) = p(i)q(i) - p(-i)q(-i)$$

(dove $i \in \mathbb{C}$ è l'unità immaginaria).

1. Dimostrare che φ è un prodotto scalare.

2. Determinare una base ortogonale per φ.

3. [facoltativo] Visto V come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, trovare la segnatura di $\psi = \mathcal{I}m(\varphi)$ ($\mathcal{I}m$ denota la parte immaginaria).