Secondo scritto 22/06/2018. Corso B

Nome e Cognome [in stampatello] ....

matricola ....

Test. Totale: XXX punti.

1. (2 punti) Siano U, V sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^{20}$. Sapendo che $\dim U = 18$ e $\dim V = 5$, elencare i valori possibili per $\dim(U \cap V)$: ....

2. (4 punti) Siano
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
   (a) Calcolare il determinante di AB: ....

   (b) Calcolare il determinante di BA: ....

3. (6 punti) (a) Sia φ il prodotto scalare definito positivo su $\mathbb{R}^3$ per cui una base ortonormale è data da $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Determinare la matrice di φ rispetto alla base canonica:

   (b) Sia ϕ un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$. Sappiamo che: (i) esiste un sottospazio W di $\mathbb{R}^3$ tale che $\dim(W) = \dim(W^\perp) = 2$ (ortogonale preso rispetto a ϕ); (ii) esistono due vettori v_1, v_2 tali che $\phi(v_1, v_1) = \phi(v_2, v_2) = 0$ e $\phi(v_1, v_2) = 1$. Scrivere qui la terna $(n_+(\phi), n_-(\phi), n_0(\phi))$ oppure "non si può determinare": ....

   (c) Sia ϕ come al punto precedente. Quanto vale, come massimo, $\dim(U \cap U^\perp)$, al variare di U fra tutti i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2? ....

4. (4 punti) Sia A una matrice 3×3 a coefficienti reali. Si sa che $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$, che $\det(A) = 3$ e che $\operatorname{tr}(A) = 5$.

   (a) Determinare il polinomio caratteristico di A: ....

   (b) A è diagonalizzabile? ☐ Sì ☐ No ☐ Non è possibile determinarlo

5. (4 punti) Consideriamo la seguente matrice M_a, dipendente da un parametro $a \in \mathbb{R}$:
$$M_a = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -3 & -a^2 & a^2+1 \end{pmatrix}.$$
   (a) Determinare, in funzione di a, gli autovalori di M_a: ....

   (b) Scrivere qui i valori di a per i quali M_a **non** è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$: ....

Parte seconda – si giustifichino in dettaglio tutte le risposte. Totale: XXX punti.

Esercizio (XXX punti)

Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ e un endomorfismo $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ con 4 autovalori distinti e reali $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$. Siano v_1, v_2, v_3, v_4 autovettori corrispondenti a questi autovalori.

1. Ricordare perché $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$.
2. Poniamo $v = v_1 + v_2 + v_3 + v_4$. Scrivere le coordinate di v nella base $\mathcal{B}$. Scrivere le coordinate di $T(v), T^2(v), T^3(v)$ nella base $\mathcal{B}$.
3. Dedurre che i vettori $\{v, Tv, T^2v, T^3v\}$ sono linearmente indipendenti, e quindi formano una base $\mathcal{A}$ di $\mathbb{R}^4$.
4. Sia M la matrice di T nella base $\mathcal{A}$. Determinare le prime tre colonne di M.
5. Sia $p_T(t) = t^4 + a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0$ il polinomio caratteristico di T. Dimostrare che la quarta colonna di M è $\begin{pmatrix} -a_0 \\ -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix}$

   Indicazione. Potrebbe essere utile applicare il teorema di Hamilton-Cayley.
6. Trovare una matrice 4×4 a coefficienti interi il cui polinomio caratteristico sia $t^4 + t^2 + 1$.

Esercizio (XXX punti)

a) Dato uno spazio vettoriale V di dimensione finita su un campo $\mathbb{K}$, siano $S, T \in \mathrm{End}(V)$ due endomorfismi di V tali che

$$ST - TS = S$$

1. Dimostrare che
   $$S^kT - TS^k = kS^k$$
   per ogni $k \in \mathbb{N}$.
2. Dedurre che se S^k è diverso dall'endomorfismo nullo allora è autovettore per l'endomorfismo Φ di $\mathrm{End}(V)$ definito da
   $$\Phi(L) = LT - TL$$
   e dimostrare che S è nilpotente.

b) Sia ora $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ siano $S, T \in \mathrm{End}(V)$ due endomorfismi di V tali che

$$ST - TS = \alpha S + \beta T$$

per certi $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

1. Dimostrare che S e T hanno un autovettore in comune nel caso particolare in cui $\alpha = \beta = 0$.
2. Dimostrare che S e T hanno un autovettore in comune nel caso particolare in cui $\alpha \neq 0, \beta = 0$. Come primo passo dimostrare che esiste un autovalore λ di T tale che $\lambda - \alpha$ non è autovalore di T. Come secondo passo mostrare che un autovettore v relativo a tale λ appartiene al nucleo di S.
3. (Facoltativo) Dimostrare che S e T hanno un autovettore in comune per ogni valore dei numeri $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.