Compito di Geometria I - 29/1/2016

Nome e cognome (stampatello) ....

matricola..............................

I parte

Per ogni quesito spuntare una (sola) casella o riempire col risultato (dove richiesto); -1 per ogni risposta errata.

1) Siano $P \equiv (-1,-2,3)$, $Q \equiv (-3,1,2)$ punti in $\mathbb{R}^3$. L'equazione cartesiana del piano passante per P e per Q e ortogonale al piano xy è:

....

2) Sia $V = \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ lo spazio degli endomorfismi di $\mathbb{R}^3$. Dire quali dei seguenti sottoinsiemi sono sottospazi vettoriali ed in caso positivo indicarne la dimensione ($\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ è la base canonica).

- $\{f \in V : \ rg(f) < 3\}$ [si; dim=.....] [no] ;
- $\{f \in V : \ f(\underline{e}_1) = f(\underline{e}_2) = 0\}$ [si; dim=.....] [no] ;
- $\{f \in V : \ f(\underline{e}_1) = f(\underline{e}_2)\}$ [si; dim=.....] [no] ;

3) Scrivere la segnatura delle seguenti matrici:

$$\begin{bmatrix} e^{100} & e^{-100} \\ e^{-100} & e^{100} \end{bmatrix}; \quad i_+ = \text{..........} \ i_- = \text{..........} \ i_0 = \text{..........}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & e^{-100} \\ e^{-100} & 0 \end{bmatrix}; \quad i_+ = \text{..........} \ i_- = \text{..........} \ i_0 = \text{..........}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & e^{-100} & 0 \\ e^{-100} & 0 & e^{100} \\ 0 & e^{100} & 0 \end{bmatrix}; \quad i_+ = \text{..........} \ i_- = \text{..........} \ i_0 = \text{..........}$$

4) Scrivere tutte le soluzioni complesse dell'equazione

$$z^4 = -81$$

....

(risolvere su un foglio)

Esercizio 1. Sia $V = \mathbb{R}_2[x]$, sia $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$, il prodotto scalare

$$\varphi(p(x), q(x)) = \sum_{i=0}^{2} p(i)q(i).$$

1. Dimostrare che φ è definito positivo.
2. Determinare la base $\mathcal{B} = \{\omega_0(x), \omega_1(x), \omega_2(x)\}$ ottenuta ortonormalizzando la base canonica $1, x, x^2$ di V con l'algoritmo di Gram-Schmidt.
3. Sia f l'endomorfismo di V dato da

   $$f(p(x)) \;=\; \sum_{i=0}^{2} \; p(i) \; \omega_i(x).$$

   Dimostrare che f è un operatore ortogonale rispetto al prodotto φ.
4. Determinare la matrice associata a f rispetto alla base $\mathcal{B}$.
5. Determinare gli autovalori di f ed eventuali autovettori.