Compito di Geometria I - 1/2/2017

Nome e cognome (stampatello) ....

matricola.............................

(per ogni quesito spuntare una (sola) casella o riempire col risultato, dove richiesto; ogni risposta errata vale -1)

1) Siano $P_1 \equiv (1, -1, 1)$, $P_2 \equiv (-1, 1, 2)$, $P_3 \equiv (-1, 0, -1)$, $P_4 \equiv (0, 1, -1)$ punti in $\mathbb{R}^3$.

- Il volume del tetraedro formato da $P_1P_2P_3P_4$ è: $vol =$ ....
- L'equazione del piano Π passante per il baricentro del tetraedro e parallelo alle rette r ed s è:

....

2)

- La matrice

$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ | si | no | ; su $\mathbb{C}$ | si | no |

- Ogni matrice

$\begin{bmatrix} 0 & z \\ w & 0 \end{bmatrix}$, $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$ | si | no |

- Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ e vale $A = iA^*$ allora A è diagonalizzabile | si | no |

3) - La segnatura di: $\begin{bmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{bmatrix}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, è: $\sigma = (.........., ..., ...)$.

- La segnatura di: $\begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 1 & b \\ 0 & b & 0 \end{bmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, è $\sigma = (.........., ..., ...)$.

- Se φ è un prodotto scalare non degenere su V spazio su $\mathbb{R}$ allora esiste $\underline{v} \in V$ isotropo se e solo se φ è indefinito. | si | no |

4) Data l'equazione

$$z + \frac{1}{z} \ = \ w$$

- per z che varia in $\{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\}$ dire come varia w ....
- dire per quali $w \in \mathbb{C}$ tutte le soluzioni z sono reali ....
- dire per quali $w \in \mathbb{C}$ tutte le soluzioni z sono immaginarie pure ....

(risolvere su un foglio: esercizi diversi su fogli diversi)

Esercizio 1. Sia

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Discutere la diagonalizzabilità di J su $\mathbb{R}$ e su $\mathbb{C}$.
2. Sia f_J l'endomorfismo di $V = \mathbb{R}^4$ dato da $f_J(\underline{x}) = J\underline{x}$, $\underline{x} \in V$. Dimostrare che se $U \subset V$ è un sottospazio di dimensione 2 allora o U è f_J-invariante oppure U è in somma diretta con $f_J(U)$ [potrebbe essere utile osservare che $J^2 = -Id$].
3. Dimostrare che l'applicazione

$$\mathbb{C} \times V \to V \ : \ (a + ib, \underline{x}) \to a\underline{x} + bf_J(\underline{x})$$

definisce un prodotto esterno su V che lo rende spazio vettoriale su $\mathbb{C}$. Determinare una base di V su $\mathbb{C}$.

Esercizio 2.

1. Sia

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1+i \\ 1+i & z \end{bmatrix}$$

($z \in \mathbb{C}$) la matrice associata a un prodotto scalare φ_z su $\mathbb{C}^2$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{C}^2$. Determinare una base ortogonale di $\mathbb{C}^2$ rispetto a φ_z quando $z = -i$ e quando $z = 0$.
2. Se J, f_J e V ($\cong \mathbb{C}^2$) sono come nell'esercizio precedente, determinare un prodotto hermitiano definito positivo su V tale che f_J risulti una trasformazione unitaria in V.