9/5/2017 - *II compitino Geometria*

Nome e cognome (stampatello) ....

matricola.............................

Parte I. *Per ogni quesito spuntare il si o il no o riempire col risultato (dove richiesto); -1 per ogni risposta errata.*

1)

1. Se gli autovalori distinti di $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ sono 1 e -1 scrivere tutti i possibili polinomi caratteristici di A :

   . . . .

   Per ognuno di tali polinomi, fare un esempio di una matrice che non sia diagonalizzabile:

   . . . .

2. Se gli autovalori distinti di $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ sono i e $-i$, allora:

   - il polinomio caratteristico di A è: . . . .

   - A è diagonalizzabile $\boxed{\text{si}}$ $\boxed{\text{no}}$;

   se no fare un esempio: $A =$

2) Sia φ un prodotto scalare in $V = \mathbb{R}^3$ e sia $\mathcal{B} = \{\underline{e}_1,\ \underline{e}_2,\ \underline{e}_3\}$ la base canonica di V.

1. se $\varphi(\underline{e}_i, \underline{e}_i) = 1\ \forall i$, allora φ è non degenere $\boxed{\text{si}}$ $\boxed{\text{no}}$

   se no fare un esempio $M_{\mathcal{B}}(\varphi) =$

2. se $\varphi_{|Span(\underline{e}_i, \underline{e}_j)} > 0\ \ \forall i \neq j$ dire quali sono le possibili segnature di φ :

   . . . .

   Per ognuna di tali segnature, fare un esempio di un φ con tale segnatura:

Parte II *(Scrivere su un foglio)*

Esercizio 1. Sia $V_n = \{(p(x), q(x)) : \ p(x), q(x) \in \mathbb{R}_n[x]\}$ che è spazio vettoriale con somma componente per componente $((p_1(x), q_1(x)) + (p_2(x), q_2(x)) = (p_1(x) + p_2(x), q_1(x) + q_2(x)))$.

1. Per $n = 2$:

   (a) Esibire una base di V_2.

   (b) Sia $f : V_2 \to V_2$ l'endomorfismo dato da $f(p(x), q(x)) = (p(x) - q(x), q(x) - p(x))$. Dimostrare che $f^2 = 2f$; dimostrare che f è diagonalizzabile trovandone una base di autovettori.

2. Sia $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e sia $f_A : V_n \to V_n$ l'endomorfismo $f_A(p(x), q(x)) = (a_{11}p(x) + a_{12}q(x), a_{21}p(x) + a_{22}q(x))$. Dimostrare che f_A è invertibile se e solo se A è invertibile.

   [facoltativo] Calcolare il rango di f_A in termini del rango di A.

Esercizio 2. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{e}_1, \ \underline{e}_2\}$ la base canonica di $V = \mathbb{R}^2$ e sia $\varphi_m : V \times V \to \mathbb{R}, \ m \in \mathbb{N}, m \geq 2$, il prodotto scalare tale che

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi_m) = \begin{bmatrix} 1 & -cos(\frac{\pi}{m}) \\ -cos(\frac{\pi}{m}) & 1 \end{bmatrix}$$

1. Dimostrare che φ_m è definito positivo $\forall m$ e trovarne una base ortogonale.

2. Sia $\rho_i : V \to V$ l'endomorfismo dato da

   $$\rho_i(\underline{v}) \ = \ \underline{v} \ - \ 2\varphi_m(\underline{v}, \underline{e}_i)\underline{e}_i$$

   $(i = 1, 2)$. Dimostrare che ρ_1 e ρ_2 sono operatori ortogonali (rispetto al prodotto φ_m) e che $\rho_i^2 = id$. Determinarne la decomposizione spettrale (basi di autovettori).

3. [facoltativo] Calcolare il minimo intero positivo n tale che $(\rho_1\rho_2)^n = id$.