28/5/2015 - *III compitino Geometria*

Nome e cognome (stampatello) ....

matricola..............................

Parte I

Per ogni quesito spuntare il si o il no o riempire col risultato (dove richiesto); -1 per ogni risposta errata.

1) [4pti] Per ognuna delle seguenti matrici simmetriche, scrivere la segnatura del prodotto canonicamente associato.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; \qquad \sigma(A) = ...; \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma(A) = ...;$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma(A) = ...; \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}; \quad \sigma(A) = ...;$$

2) [5pti] Sia A una matrice quadrata complessa; dimostrare nel riquadro che la matrice $B = A^*A$ è hermitiana e il prodotto hermitiano ad essa associato $((\underline{u}, \underline{v}) \to \underline{u}^* B \underline{v})$ è semidefinito positivo

.

Dimostrare nel riquadro che $ker(B) = ker(A)$.

.

3)[4pti] Per ognuna delle seguenti matrici simmetriche, dire se il prodotto canonicamente associato ha un vettore isotropo (non nullo) ed eventualmente scriverne uno.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$; si | no ; se sì esempio $\underline{v} =$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$; si | no ; se sì esempio $\underline{v} =$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$; si | no ; se sì esempio $\underline{v} =$

$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; si | no ; se sì esempio $\underline{v} =$

Parte II

Esercizio 1. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_1, \underline{e}_3\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Sia $V = Span\{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ e $W = Span\{\underline{e}_3\}$.

1. Dimostrare che l'insieme S dei prodotti scalari φ su $\mathbb{R}^3$ tali che $V \perp W$ (si intende: $\varphi(\underline{u}, \underline{v}) = 0$, per ogni $\underline{u} \in V$ e per ogni $\underline{v} \in W$) è uno spazio vettoriale con somma e prodotto esterno
$$(\varphi + \psi)(\underline{u}, \underline{v}) = \ \varphi(\underline{u}, \underline{v}) + \psi(\underline{u}, \underline{v}), \quad (\alpha\varphi)(\underline{u}, \underline{v}) = \alpha \cdot \varphi(\underline{u}, \underline{v}).$$
Determinare la dimensione di S [considerare come deve essere fatta la matrice associata a un prodotto che sta in S rispetto alla base canonica].

2. Determinare due prodotti scalari $\varphi,\ \psi$ in S di segnatura rispettivamente $(2, 1, 0),\ (1, 2, 0)$ e tali che il vettore $\underline{v} = \underline{e}_1 + 2\underline{e}_2 + 3\underline{e}_3$ sia isotropo.

Esercizio 2.

1. Nello spazio euclideo $V = \mathbb{R}_3[x]$, con prodotto scalare definito positivo
$$\varphi(p(x), q(x)) = \int_0^1 p(x)q(x)dx,$$
sia $f : V \to V$ l'endomorfismo $f(p(x)) = p(1 - x)$. Dimostrare che f è simmetrico e determinare gli autovalori di f e una base ortonormale di autovettori di V [sugg. per dimostrare che f è simmetrico: si faccia un banale cambiamento di variabili ...]

2. Dimostrare che un endomorfismo simmetrico f di uno spazio euclideo (W, ψ) ha tutti autovalori positivi se e solo se
$$\psi(f(\underline{v}), \underline{v}) > 0 \ \text{ per ogni vettore } \underline{v} \neq \underline{0}.$$

3. [facoltativo] In generale, ordiniamo gli autovalori distinti di un operatore simmetrico f in (W, ψ) in ordine crescente: $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k$. Dimostrare che
$$\lambda_1 = \ min\{\psi(f(\underline{v}), \underline{v}) : \ \|\underline{v}\| \ = \ 1\}$$