19/5/2016 - *III compitino Geometria*

Nome e cognome (stampatello) ....

matricola..............................

Parte I [12 pti circa]

Per ogni quesito spuntare il si o il no o riempire col risultato (dove richiesto); -1 per ogni risposta errata.

1) Sia $\mathcal{B} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Scrivere: la matrice A associata, rispetto a $\mathcal{B}$, alla rotazione ρ di $\pi/4$ rispetto all'asse $\underline{e}_1$; la matrice B associata, rispetto a $\mathcal{B}$, alla riflessione ortogonale (per il prodotto canonico) rispetto al piano di equazione $x + y + z = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} ... & ... & ... \\ ... & ... & ... \\ ... & ... & ... \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} ... & ... & ... \\ ... & ... & ... \\ ... & ... & ... \end{pmatrix};$$

Le due matrici sono ortgonali? sono simili? (giustificare le risposte nel riquadro sotto)

.

2) Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n con prodotto scalare φ. Si ha:

1. se $n > 1$ e $\varphi \neq 0$ è sempre possibile risolvere (con vettori diversi) tutte tre le disequazioni $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) > 0$, $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) < 0$, $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0$ si no
2. se $n > 1$ e φ è indefinito è sempre possibile risolvere (con vettori diversi) tutte tre le disequazioni $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) > 0$, $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) < 0$, $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) = 0$ si no
3. se $n > 1$ e $\exists$ un sottospazio W con $\varphi_{|W} = 0$ allora $\iota_0(\varphi) \geq dim(W)$ si no
4. se $n > 1$ e $\exists$ un sottospazio W, $dim(W) > \frac{1}{2}dim(V)$, con $\varphi_{|W} = 0$ allora $\iota_0(\varphi) \geq 0$ si no
5. se $n > 1$ e $\exists$ un sottospazio W, $dim(W) > \frac{1}{2}dim(V)$, con $\varphi_{|W} = 0$ allora $\iota_0(\varphi) \geq 0$ si no
6. se $V = U + W$ per due sottospazi U e W tali che $\varphi_{|U} > 0$, $\varphi_{|W} < 0$, allora $\iota_+(\varphi) = dim(U)$, $\iota_-(\varphi) = dim(W)$, si no

Parte II

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^n$ si consideri il prodotto scalare che sui vettori $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\underline{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ è definito da

$$\varphi(\underline{x}, \underline{y}) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} x_j \right) y_i$$

1. Per $n = 3$:
   (a) determinare la matrice associata a φ rispetto alla base canonica;
   (b) determinare una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$;
   (c) dedurre la segnatura del prodotto scalare.
2. [facoltativo] Determinare la segnatura per n qualunque.

Esercizio 2. Sia $V_n \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ il sottospazio delle matrici A tali che $a_{ii} = 0,\ i = 1, \ldots, n$. Sia $\varphi(A, B) = tr(A \cdot {}^tB)$ il prodotto scalare "canonico" definito positivo.

1. Dimostrare che l'endomorfismo f di V_n definito da $f(A) = {}^tA$ è simmetrico e trovarne autovalori e autospazi.
2. Scriviamo una matrice $A \in V_n$ come $A = A_+ + A_-$ dove A_+ è la parte sopra la diagonale di A ed A_- quella sotto la diagonale. Dimostrare che
   $$\psi(A, B) = tr(A_+ \, {}^tB_+ \ - \ tr(A_- \, {}^tB_-)$$
   è un prodotto scalare in V_n e f è simmetrico rispetto a ψ.
3. Calcolare la segnatura di ψ ed identificare due sottospazi isotropi rispetto a ψ di dimensione massima in V_n, che siano in somma diretta ortogonale rispetto a φ.