Nome e cognome (stampatello) ....

matricola.............................

Parte I *(per ogni quesito riempire col risultato; fra parentesi quadre è indicato il valore della risposta esatta. Ogni risposta errata vale -1.)*

1. [pti 2] Scrivere l'equazione del piano che contiene la retta r di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} 2x - 3y - z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \end{cases}$$

ed è parallelo all'asse y.

....

2. [solo compitino] Dato il piano $\Pi_{a,b,c}$ di $\mathbb{R}^3$ di equazione

$$\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} + \frac{x_3}{c} = 1 \quad (a, b, c > 0),$$

sia P_i il punto di intersezione di $\Pi_{a,b,c}$ con l'asse x_i ($i = 1, 2, 3$). In funzione di a, b, c, scrivere:

(a) [pti 1] le coordinate del baricentro B del triangolo $P_1P_2P_3$;

$$B \equiv \text{.....................................};$$

(b) [pti 1] le coordinate del baricentro G del tetraedro $OP_1P_2P_3$ (O è l'origine);

$$G \equiv \text{.....................................};$$

(c) [pti 3] l'area del triangolo $P_1P_2P_3$

$$Area \; = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad ;$$

(d) [pti 4] il volume del tetraedro $GP_1P_2P_3$:

$$Vol \; = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad ;$$

3. Sia $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$ una base di $\mathbb{R}^3$. Per $r = 0, 1, 2, 3$, dire quanti sono gli endomorfismi f di $\mathbb{R}^3$ per cui si abbia simultaneamente

$$f(\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}) \subset \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\} \quad \text{e} \quad rg(f) = r \; :$$

[pti 1] $r = 0$: numero endomorfismi= ....;
[pti 1] $r = 1$: numero endomorfismi= ....;
[pti 2] $r = 2$: numero endomorfismi= ....;
[pti 1] $r = 3$: numero endomorfismi= ....;

4. [pti 2] Scrivere tutte le soluzioni complesse dell'equazione

$$z^2 = \overline{z}.$$

....

Parte II (scrivere su un foglio)

Esercizio 1. Sia data la matrice

$$M_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & \alpha-1 \\ 1 & 0 & \alpha+1 & \alpha+1 \\ 0 & 0 & \alpha^2-1 & 0 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^2+1 \end{bmatrix}$$

$\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Calcolare i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali si abbia:

$$dim(ker(M_\alpha)) = rg(M_\alpha)$$

2. Per tali valori, trovare equazioni cartesiane e parametriche per $ker(M_\alpha)$ e per $Im(M_\alpha)$ e dire se questi due spazi sono in somma diretta.

3. [solo per chi fa il compito] Per i valori di α del punto 2, discutere la diagonalizzabilità di M_α.

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{R}_2[x]$, sia $W = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e sia $F_A : V \to W$ l'applicazione che ad un polinomio $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ associa la matrice ottenuta valutando il polinomio in una fissata matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$F_A(p(x)) \ := \ p(A) = \ a_0 \ I \ + a_1 \ A \ + \ a_2 \ A^2$$

(I è la matrice identità di ordine 2).

1. Dimostrare che F_A è lineare.

2. Calcolare la matrice associata ad F_A rispetto alle basi canoniche di V e di W, quando la matrice A è data da

$$A \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. *[facoltativo]* Dimostrare che $rg(F) \leq 2$, qualunque sia la matrice A.

4. [solo per chi fa il compito] Sia $\varphi : W \to W$ il prodotto scalare

$$\varphi(M,N) \ = \ tr({}^tMN), \quad \forall M,N \in W.$$

Determinare una base di $Im(F_A)^\perp$ quando A è la matrice del punto 2.