Nome e cognome (stampatello) ....

matricola.............................

I parte

Per ogni quesito spuntare il si o il no o riempire col risultato (dove richiesto); 1 punto per ogni quesito giusto; se c'è un errore il totale della domanda corrispondente vale -1.

1) Dire quali delle seguenti matrici sono diagonalizzabili:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{|c|} \hline \text{si} \\ \hline \text{no} \\ \hline \end{array} \; ; \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{|c|} \hline \text{si} \\ \hline \text{no} \\ \hline \end{array} \; ; \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{|c|} \hline \text{si} \\ \hline \text{no} \\ \hline \end{array}$$

2) Sia A una matrice quadrata invertibile (indichiamo con A^{-n} la matrice $(A^{-1})^n$).

si ha sempre: $det(A^{-2}) \leq 0$ $\boxed{\text{si}}$ $\boxed{\text{no}}$; si ha sempre: $det(A^2) \geq 0$ $\boxed{\text{si}}$ $\boxed{\text{no}}$;

si ha sempre: $det({}^t\overline{A}) = det(A)$ $\boxed{\text{si}}$ $\boxed{\text{no}}$

3) Sia $p(\lambda) = -\lambda^3 - \lambda + 2$ il polinomio caratteristico di una matrice A. Allora:

l'ordine di A vale $\boxed{....}$; $tr(A)$ vale $\boxed{....}$; $det(A)$ vale $\boxed{....}$;

A è diagonalizzablile sui reali $\boxed{\text{si}}$ $\boxed{\text{no}}$;

A è diagonalizzablile sui complessi $\boxed{\text{si}}$ $\boxed{\text{no}}$;

4) Sia $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ una matrice tale che $A = -{}^tA$. Allora

A ha necessariamente tutti gli autovalori reali $\boxed{\text{si}}$ $\boxed{\text{no}}$;

tutti gli autovalori di A hanno parte reale nulla $\boxed{\text{si}}$ $\boxed{\text{no}}$;

A non è invertibile $\boxed{\text{si}}$ $\boxed{\text{no}}$

Parte II

Esercizio 1. Sia data la matrice

$$M_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ \alpha & -\alpha+1 & 1 & -\alpha \\ \alpha & \alpha+1 & 2\alpha+1 & -\alpha \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, calcolare il rango di M_α e una base per $ker(M_\alpha)$.
2. Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, discutere la diagonalizzabilità di M_α.
3. Per $\alpha = 1$ trovare una base di autovettori per $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{K}_2[x]$. Siano $a,\ b \in \mathbb{K}$ e sia $f : V \to V$ data da

$$f:\ p(x) \ \to\ p(0) + p(a)x + p(b)x^2.$$

1. Dimostrare che f è un'applicazione lineare.
2. Sotto quali condizioni su a e b si ha che f è isomorfismo? (giustificare la risposta).
3. Discutere la diagonalizzabilità di f (per $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) nei casi
   (a) $a = b = 0$
   (b) $a = -1,\ b = 1$
   (c) $a = 1,\ b = -1$