Richiami: X sp. top., $x_0 \in X$: $\pi_1(X, x_0)$ GRUPPO FONDAMENTALE

- π_1 come "FUNTORE" TRA CATEGORIE: spazi topologici puntati $\overset{\pi_1}{\rightsquigarrow}$ GRUPPI

$$f : (X, x_0) \to (Y, y_0) \rightsquigarrow f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0) \quad \text{t.c.}$$

$$f = id_X \rightsquigarrow f_* = id_{\pi_1(X, x_0)}$$

$$g : (Y, y_0) \to (Z, z_0) \qquad (g \circ f)_* = g_* \circ f_*$$

Corollario: f omeo $\Rightarrow$ $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ isomorfismo

Proprietà di omotopia: $f \underset{F}{\simeq} g : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ con $F(x_0, t) = y_0$, $\forall t \Rightarrow$

$$f_* = g_*$$

Cambio del punto base: x_1 nella stessa componente di x_0:

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X, x_0) \arrow[r, "f_*^{(0)}"] \arrow[d, "\varphi_\#"] & \pi_1(Y, f(x_0)) \arrow[d, "(f\circ\varphi)_\#"] \\
\pi_1(X, x_1) \arrow[r, "f_*^{(1)}"] & \pi_1(Y, f(x_1))
\end{tikzcd}$$

è commutativo

dove $\varphi : (I, 0, 1) \to (X, x_0, x_1)$ e $\varphi_\# [\alpha] = [\varphi^{-1} \alpha \varphi]$

Quindi: $f_*^{(0)}$ è iniettivo (suriettivo) $\Longleftrightarrow$ $f_*^{(1)}$ lo è

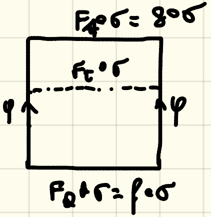
Se $f \sim g$ LIBERAMENTE?

Allora $f : (X, x_0) \to (Y, f(x_0))$, $g : (X, x_0) \to (Y, g(x_0))$

Allora $\varphi(t) = F(x_0, t)$ è un cammino tra $f(x_0)$ e $g(x_0)$ e si ha

$$
\begin{tikzcd}
 & \pi_1(Y, g(x_0)) \\
\pi_1(X, x_0) \arrow[ur, "g_*"] \arrow[dr, "f_*"'] & \\
 & \pi_1(Y, f(x_0)) \arrow[uu, "{([\alpha] \mapsto [\varphi^{-1} \alpha \varphi])}"']
\end{tikzcd}
$$

è commutativo



con $\sigma : (I, \dot{I}) \to (X, x_0)$

<u>Corollario</u> $f \sim g$ allora f è isomorfismo $\iff$ g lo è.

<u>Corollario</u> $f \sim id$ liberamente $\Rightarrow$ f_* è isomorfismo.

<u>Corollario</u> $f : X \xrightarrow{\simeq} Y$ equivalenza omotopica $\Rightarrow$ $f_* : \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\cong} \pi_1(Y, f(x_0))$

<u>dim</u> $\exists\, g : Y \to X$ con $g \circ f \sim id_X$ e $f \circ g \sim id_Y$. Allora

$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ è iso tra $\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\text{iniettivo}} \pi_1(Y, f(x_0)) \longrightarrow \pi_1(X, g \circ f(x_0))$

$(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$ è iso tra $\pi_1(Y, f(x_0)) \longrightarrow \pi_1(X, g \circ f(x_0)) \xrightarrow{\text{surgettivo}} \pi_1(Y, f \circ g \circ f(x_0))$

$\pi : \mathbb{R} \to S^1 \qquad \pi(x) = \cos 2\pi x + i \operatorname{sen} 2\pi x$

<u>Lemma di sollevamento di cammini.</u> $\sigma : (I, 0) \to (S^1, 1)$. $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\exists!\ \sigma' : (I, 0) \to (\mathbb{R}, n)$ t.c. $\pi \circ \sigma' = \sigma$

<u>Lemma di sollevamento dell'omotopia</u> (per cammini). Se $\sigma, \tau : (I, 0) \to (S^1, 1)$ e $F : \sigma \simeq \tau$ rel $(0,1)$ allora se $\sigma', \tau' : (I, 0) \to (\mathbb{R}, n)$ sono i sollevamenti di σ, τ, $\exists!\ F' : I \times I \to \mathbb{R}$ t.c. $F' : \sigma' \simeq \tau'$ rel $(0,1)$, $\pi \circ F' = F$.

NOTA: in particolare $\sigma'(1) = \tau'(1)$

I lemmi precedenti sono caso particolare di

<u>Lemma di sollevamento dell'omotopia</u> (caso generale) (Y, y_0) arbitrario, $f : (Y, y_0) \to (S^1, 1)$ un'applicazione che si solleva a $f' : (Y, y_0) \to (\mathbb{R}, n)$. Allora ogni omotopia $F : Y \times I \to \mathbb{R}$ con $F(y, 0) = f(y)$ $\forall y \in Y$ si solleva a $F' : Y \times I \to E$, con

con $F'(y,0) = f'(y)$, $\forall y \in Y$.

<u>Unicità</u> Y connesso, $f:(Y,y_0) \to (S^1, 1)$. Se $\exists f':(Y,y_0) \to (\mathbb{R}, n)$ con $\pi \circ f' = f$, allora f' è unica.

<u>dim</u> Se $\exists f'':(Y,y_0) \to (\mathbb{R}, n)$, con $p f'' = f$, sia

$$A = \{ y \in Y \mid f'(y) = f''(y) \}, \quad B = \{ y \in Y \mid f'(y) \neq f''(y) \}.$$

Allora $Y = A \cup B$, $y_0 \in A$. Mostriamo che A è aperto:

Sia $y_1 \in A$, e $U \ni f(y_1)$ aperto banalizzante. Allora $f'(y_1) = f''(y_1) \in$ foglio S.

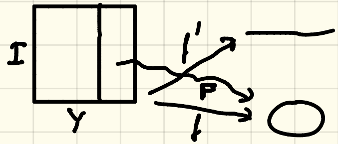
(aperto) e $(f')^{-1}(S) \cap (f'')^{-1}(S) \ni y_1$ è aperto e $\subset A$.

Se $y_1 \in B$, $f'(y_1) \in$ foglio S', $f''(y_1) \in$ foglio S'' disgiunti. Quindi

$(f')^{-1}(S') \cap (f'')^{-1}(S'')$ è aperto $\ni y_1$ e $\subset B$.

dim sollevamento cammini: Unicità dimostrata. Partizioniamo I con $0=t_0<t_1<\dots<t_n=1$ cosicché $\sigma([t_i,t_{i+1}])\subset U_i$ banalizzante [si prende $\{\sigma^{-1}(U_i)\}_{i\in I}$ e il numero di Lebesgue del ricoprimento di I]. Sia $\psi_i : V_i \to S$ l'omeomorfismo inverso di π, con S foglio che $\ni \sigma'(t_i)$ [per induzione si è sollevato $\sigma|_{[0,t_i]}$ a $\sigma' : [0,t_i]\to R$, con $\sigma'(0)= m$].

dim sollevamento omotopie.



idea: solleviamo ogni cammino

$\varphi_y(t)=$

$t \to F(y,t)$ a partire da $f'(y)$. Si deve dimostrare che è continua.

Consideriamo ricoprimento banalizzante $S^1\subset\bigcup_\alpha U_\alpha$ e $F^{-1}(U_\alpha)\cap(\{y\}\times I)$.

$\forall$ punto $y\times t$ $\exists$ aperto $N_y\times(t-a,t+a)$ contenuto in uno degli $F^{-1}(U_\alpha)$

Estraiamo un ricoprimento finito $N_{y,i}\times(t-a_i,t+a_i)$ di $y\times I$. Allora se poniamo $N = \bigcap N_{y,i}$ si ha che $N \times I$ ha la proprietà che $F(N \times [t_i, t_{i+1}]) \subset U_{\alpha_i}$, $i = 1, \dots, k$. Quindi come per il lemma di sollevamento dei cammini $F(N \times I)$ si solleva univocamente ad $F'(N \times I)$ con F' continua.

Ne segue che F' è continua in ogni punto (y,t).

Come discende sollevamento omotopie di cammini:

$\exists\ F': I^2 \to \mathbb{R}$ con $\pi \circ F' = F$. Siccome $F(\{0,1\} \times I) = 1$ segue $F'(\{0,1\} \times I) = n$

quindi F' è omotopia rel $\{0,1\}$.

<u>Corollario</u> $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$, generato dalla classe di $\omega: t \to \cos 2\pi t + i \sin 2\pi t$, $t \in [0,1]$

Definiamo $\varphi([\sigma]) = \sigma'(1)$ $\left(\sigma: (I, \dot{I}) \to (S^1, 1)\right)$, σ' sollevamento di σ, $\sigma'(0) = 0$.

È ben definita $\sigma \sim \tau$ rel $\dot{I} \Rightarrow \sigma' \sim \tau'$ rel $\dot{I} \Rightarrow \sigma'(1) = \tau'(1)$.

È un omomorfismo: $\sigma' \cdot (\tau' + \sigma'(1)) = (\sigma\tau)'$

È surgettiva: $\sigma': t \to tn \Rightarrow \pi \circ \sigma' = \sigma$ si solleva a σ' e $\sigma'(1) = n$.

È iniettiva: $\sigma'(1) = 0 \Rightarrow \sigma' \underset{F'}{\sim} 0$ rel$(0,1) \Rightarrow \pi \circ F' = F$ è omotopia tra σ e 1.

<u>ALCUNE APPLICAZIONI</u>

1) Teo fondamentale dell'algebra. $p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$

Assumiamo $p(z) \neq 0$ $\forall z \in \mathbb{C}$. Allora

$$f_r(t) = \underbrace{p(r e^{2\pi i t}) / p(r)}_{||\ \ ||}$$ è un loop su S^1 basato in 1.

$f_r \sim f_s$ $\forall r, s$, in particolare $f_r \sim f_0 \equiv 1$. Se $r = |z| > |a_1| + \dots + |a_n|$ e $r > 1$

$$|z^n| = r^n = r \cdot r^{n-1} > (|a_1| + \dots + |a_n|)|z|^{n-1} > |a_1 z^{n-1} + \dots + a_n|$$

Quindi $p_t(z) = z^n + t(a_1 z^{n-1} + \dots + a_n)$ non ha radici per $0 \leq t \leq 1$.

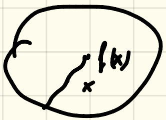
Variando t da 1 a 0 si trova un'omotopia tra $f_r(t)$ e $f_r(t)$ calcolato usando $p_0(t) = z^n$, cioè $t \mapsto e^{2\pi n i t}$, cioè ω^n. Ma si è visto che $[f_r] \neq 0$, quindi deve essere $n = 0$. —

2) Non può esistere retrazione $r: D^2 \to \partial D^2 \equiv S^1$

dim $S^1 \xhookrightarrow{i} D^2 \xrightarrow{r} S^1 \Rightarrow (r \circ i)_* = (id_{S^1})_* = r_* \circ i_* : \pi_1(S^1) \to \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{\pi_1(D^2)} \to \pi_1(S^1)$

che è assurdo.

3) <u>Teo. punto fisso di Brouwer</u> (dim 2) Ogni $f: D^2 \to D^2$ ha un punto fisso



Prop $\pi_1(X\times Y) = \pi_1(X)\times\pi_1(Y)$

Coroll $\pi_1(T^2) = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

Def Rivestimento, aperti banalizzanti, fogli

Esempi: $S^2 \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, $S^1 \to \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, $\mathbb{C}^* \xrightarrow{d} \mathbb{C}^* : z \mapsto z^d$, curve di grado d in $\mathbb{C}^2$

Lemma i) $p: E \to X$ è omeo locale

ii) $\forall x, y \in X$, $p^{-1}(x)$ e $p^{-1}(y)$ hanno la stessa cardinalità

iii) $\forall Y \subset X$, $p: p^{-1}(Y) \to Y$ è un rivestimento.

dim i) $\forall U \subset X$ banalizzante, $p: p^{-1}(U) \to U$ è omeo locale. Ma $\bigcup p^{-1}(U) \supset X$

ii) Sia $x \in X$ e $A = \{ y \in X \mid \# p^{-1}(y) = \# p^{-1}(x) \}$. Se $y, y' \in U$ banalizzante, allora $p^{-1}[V] = \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha$ e ovviamente $p^{-1}(y)$ e $p^{-1}(y')$ sono in bigezione con I.

Ne segue che A è aperto, e anche $X \setminus A$ lo è.

iii) segue dalla definizione.

Riportiamo i teo sollevamento: stessa dimostrazione

<u>Monodromia</u> : Mon: $p^{-1}(x) \times \Omega(X, x, y) \longrightarrow p^{-1}(y)$

<u>Corollario 1</u> $\pi_*: \pi_1(E, e_0) \to \pi_1(X, x_0)$ è iniettiva. Si ha che

$\operatorname{im} \pi_* = \{ [\sigma] \in \pi_1(X, x_0) \mid$ se σ' è sollevamento di σ da e_0 $\Rightarrow \sigma'(0) = \sigma'(1) \ (= e_0) \}$

<u>dim</u>: Se $\sigma' : (I, \dot{I}) \to (E, e_0)$ è t.c. $F: \pi\sigma' \simeq_{\text{rel } \dot{I}} c_{x_0}$ (cammino costante in x_0)

tramite F, allora un sollevamento di F, $F' : \sigma' \simeq_{\text{rel } \dot{I}} c_{e_0}$. da e_0

Se $\sigma : (I, \dot{I}) \to (X, x_0)$ si solleva a un cammino chiuso σ', allora è ovvio che $\pi_*([\sigma']) = [\sigma]$. Se invece $F : \sigma \underset{\text{rel } \dot{I}}{\sim} \sigma_1$ tale che σ_1 si solleva a

un cammino chiuso σ_1', il sollevamento F' di F (con $F'|_{I\times 0} = \sigma_1'$) dà

un'omotopia $\overset{\text{rel } \dot{I}\times I}{\vee}$ tra σ_1' e un cammino σ' che solleva σ, che è chiuso.

<u>Attenzione</u>: Dato $\sigma : (I, \dot{I}) \to (X, x)$ allora può in generale succedere che

$\exists\ e_1, e_2 \in p^{-1}(x)$ t.c. $e_1 \cdot [\sigma]$ sia chiuso ma $e_2 \cdot [\sigma]$ non lo sia.

Vedremo un criterio che dice quando questo avviene.

<u>Esempi</u> $S^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, $\quad S^1 \xrightarrow{d:1} S^1$

$$S^1 \times \mathbb{R} \longrightarrow S^1 \times S^1$$

Cor 2. E conness. $p^{-1}(x) \longleftrightarrow$ classi laterali destre di $p_* \pi_1(E, e)$ in $\pi_1(X, x)$

Dim definiamo $\mu : \pi_1(X, x) \longrightarrow p^{-1}(x) \; : \; \mu([\sigma]) = e \cdot [\sigma] \qquad (e \in p^{-1}(x))$

μ surgettiva: se $e' \in p^{-1}(x)$, basta prendere un cammino $\tau : (I, 0, 1) \to (E, e, e')$

e $\sigma = p \circ \tau$ è chiuso. Ovviamente $e \cdot [\sigma] = e'$.

Se $[\lambda] \in \pi_1(X, x)$ e $\mu([\lambda]) = \mu([\sigma])$ allora la composizione $\sigma' (\lambda')^{-1}$ dei

sollevamenti è un cammino chiuso in E: sia $\varepsilon = p(\sigma' (\lambda')^{-1})$ in X. Quindi

$$p(\sigma')\, p((\lambda')^{-1}) = \sigma \lambda^{-1} = \varepsilon \quad \text{cioè} \quad [\sigma] = [\varepsilon][\lambda] \quad \text{con } [\varepsilon] \in$$

$p_* \pi_1(E, e)$ ∎

Come cambia $p_* \pi_1(E, e)$ variando $e \in p^{-1}(x)$?

Corollario 3 $[\sigma] \in \pi_1(X,x)$ allora

$$[\sigma]^{-1}\, p_* \pi_1(E,e)\, [\sigma] = p_* \pi_1(E, e\cdot[\sigma])$$

dim

in particolare: $p_*\pi_1(E,e_0)$ e $p_*\pi_1(E,e_1)$ sono coniugati (tramite $\sigma =$ p(cammino tra e_0 ed e_1)). Al variare quindi di $e \in p^{-1}(x)$ si ha che $p_*\pi_1(E,e)$ è un'intera classe di coniugio in $\pi_1(X,x)$.

Corollario: $\forall\ \sigma : (I, \dot{I}) \to (X, x_0)$ si sollevano sempre allo stesso modo (cammini chiusi o cammini aperti) in due punti $e, e' \in p^{-1}(x_0) \iff p_*(\pi_1(E,e)) = p_* \pi_1(E,e')$. Quindi questo vale $\forall\ e, e' \in p^{-1}(x) \iff p_* \pi_1(E,e)$ è sottogruppo normale

Def Un rivestimento connesso $p : E \to X$ si dice <u>regolare</u> se $p_* \pi_1(E, e_0)$ è sgr. normale di $\pi_1(X, x_0)$

<u>NOTA</u>: non dipende dal punto x_0 scelto. Infatti come visto in generale

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(E,e) & \xrightarrow{\sigma_\#} & \pi_1(E,e') \\ \downarrow & & \downarrow p_* \\ \pi_1(X,x) & \xrightarrow{(p\circ\sigma)_\#} & \pi_1(X,x') \end{array}$$

con le frecce orizzontali isomorfismi

Criterio generale di sollevamento

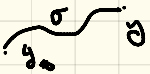
Teo
$$\begin{array}{ccc} & & (E, e_0) \\ & \overset{f'}{\nearrow} & \downarrow p \\ (Y, y_0) & \xrightarrow{f} & (X, x_0) \end{array}$$

Y connesso per archi e localmente connesso per archi. Allora f' esiste $\Leftrightarrow$ $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(E, e_0))$

dim $\Rightarrow$ ovvio.

$\Leftarrow$

Definiamo $f'(y) = (f \circ \sigma)'(1)$, $\quad \sigma : (I, 0, 1) \to (X, y_0, y)$.



Se $\sigma_1 : (I, 0, 1) \to (X, y_0, y)$, sia $\lambda = (f\sigma) \cdot (f\sigma_1)^{-1}$ cammino chiuso in x_0, $[\lambda] = f_*([\sigma \sigma_1^{-1}])$. Allora λ si solleva a un cammino chiuso, quindi deve essere $(f \circ \sigma)'(1) = (f \circ \sigma_1)'(1)$.

Per la continuità: sia $V \ni f'(y)$ t.c. $p|_V$ è omeomorfismo con $U \ni f(y)$ banalizzante.

Prendiamo $W \ni y$ connesso per archi, $W \subset f^{-1}(U)$. $\forall z \in W$, prendiamo un cammino $\sigma_{y,z}$ tra y e z in W, e sia $\tau = \sigma \sigma_{yz}$. Allora $(f \circ \tau)'(1) \in V$.

__Cor__. Se Y è semplicemente connesso $\Rightarrow$ sollevamento esiste sempre.

__Cor__ (teorema di Borsuk-Ulam). $\nexists$ $f : S^2 \to S^1$ t.c. $f(-x) = -f(x)$ $\forall x \in S^2$.

__dim__ se $\exists$ sollevamento a $f' : S^2 \to \mathbb{R}$. Ma $\forall$ mappa $S^2 \to \mathbb{R}$ $\exists$ $x \in S^2$ t.c. $f'(x) = f'(-x)$ [esercizio] e quindi $f(x) = p f'(x) = f(-x) = p f'(-x)$.

__Coroll__ $\forall$ $f : S^2 \to \mathbb{R}^2$ $\exists$ x t.c. $f(x) = f(-x)$.

Def E sp. top., $G \subset \mathrm{Omeo}(E)$ sottogruppo. Si dice che G agisce su E in modo propriamente discontinuo se $\forall x \in E$ $\exists$ intorno $U \ni x$ t.c. $g(U) \cap U = \emptyset$ $\forall g \neq 1$. L'orbita di $e \in E$ è $G.e = \{g(e) \mid g \in G\}$

Teo. Se G agisce in modo pr. dis. su E e il quoziente E/G è connesso allora $p: E \to E/G$ è un rivestimento regolare

dim p aperta: $e \in E$, $\forall U \ni e$ aperto allora $p^{-1}(p(U)) = \bigcup_{g \in G} g(U)$ è aperto. e quindi $p(U)$ è aperto. Scegliamo un $U \ni e$ t.c. $g(U) \cap U = \emptyset$ $\forall g \neq 1$. Allora i vari $g(U)$ sono tutti disgiunti: $g(U) \cap h(U) = h(h^{-1}g(U) \cap U) = \emptyset$ ed essendo $U \to p(U)$ omeomorfismo in quanto aperta e bigettiva $\Rightarrow$ è omeomorfismo. Così $g(U) \longrightarrow p\,g(U) = g(U) \longrightarrow U \longrightarrow p\,g(U)$

p è regolare perché se $\sigma : [I, \dot I] \to (E/G, p(e))$ $\Rightarrow$

$g(e)\cdot[\sigma] = g(e\cdot[\sigma])$ e si usa il criterio del coroll 4.

<u>Prop</u> <u>12.5 del libro</u>: E Hausdorff, G agisce liberamente e $\forall e \in E\ \exists V \ni e$

$\#\{g \in G \mid g(U) \cap V \neq \emptyset\} \Rightarrow G$ agisce in modo propriamente discontinuo.

<u>dim</u> .....

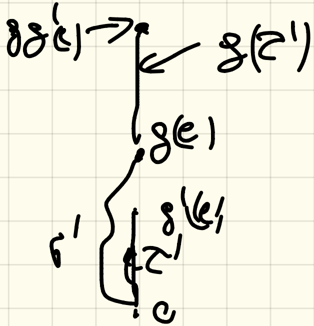
Corp 13.2.) del libro. Azioni di un gruppo su un insieme $G \times T \to T$, ecc

G agisce in modo prop. dis. su E, e con $p: E \to E/G$ rivestimento $\forall e \in E$, sia

$$\theta_e : \pi_1(X, x) \to G : \quad [\sigma] \longrightarrow \text{l'unica } g \in G \text{ t.c. } g(e) = e\cdot[\sigma]$$

__Teorema__ θ_e è omomorfismo con $\ker\theta_e = p_*\pi_1(E,e)$, e se E è connesso

allora $G \cong \pi_1(X,x) / p_*\pi_1(E,e)$



__dim__ $g(e) = e[\sigma]$, $g'(e) = e[\tau]$ $\Rightarrow$ $\theta_e([\sigma\tau]) =$

$\ker\theta_e$ = cammini che si sollevano a un cammino chiuso

$\Rightarrow p_*\pi_1(E,e)$

__Corollario__ $\pi_1 E = 1 \Rightarrow \pi_1(E/G) \cong G$

Automorfismi di rivestimento $\mathrm{Aut}(E,p)$. Teorema 13.26 del libro

Morfismo di rivestimenti: $E_1 \xrightarrow{\varphi} E_2$, $p_1 : E_1 \to X$, $p_2 : E_2 \to X$ **IPOTESI** TUTTI GLI SPAZI LOC. CONN. PER ARCHI

Isomorfismo: $\exists$ inversa ψ **oss** φ è un rivestimento

In particolare $\mathrm{Aut}(E,p)$ Esempio $\mathrm{Aut}(\mathbb{R} \xrightarrow{p} S^1, p) \cong \mathbb{Z}$ = traslazioni

Prop $\mathrm{Aut}(E,p)$ agisce in modo propriamente discontinuo su E (quindi $E \to E/\mathrm{Aut}(E,p)$ è un rivestimento regolare)

dim Sia $e \in E$, $V \ni e$ t.c. $p|_V : V \to U$ omeo su aperto banalizzante. Se $\varphi \in \mathrm{Aut}(E,p)$ è t.c. $V \cap \varphi(V) \neq \emptyset$, sia $e' \in V \cap \varphi(V)$, $e' = \varphi(e'')$, $e'' \in V$.
Ma $e'', \varphi(e'')$ stanno nella stessa fibra e $p|_V$ è iniettiva $\Rightarrow e'' = \varphi(e'') \overset{\text{oss}}{\Rightarrow} \varphi = id$.

Lemma Se $\varphi \in \mathrm{Aut}(E,p)$ fissa un punto $(\varphi(e) = e) \Rightarrow \varphi = id$

dim Infatti φ e id sono due sollevamenti di $(E,e) \xrightarrow{p} (X,x)$ lungo $p : (E,e) \to (X,x)$, vale l'unicità.

Prop $p: E \to X$ connesso. $\exists\ \varphi \in Aut(E,p)$ t.c. $\varphi(e) = e'$ $(p(e) = p(e'))$ $\iff$

$$p_* \pi_1(E,e) = p_* \pi_1(E,e')$$

dim $\Rightarrow$ φ omeo $\Rightarrow$ φ_* iso $\Rightarrow$ $p_* \pi_1(E,e) = p_* \varphi_* \pi_1(E,e) = p_* \pi_1(E,e')$.

$\Leftarrow$ Per teo sollevamento, $\exists$ $(E,e) \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} (E,e')$ e quindi $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi = id$ per il lemma.

Prop $p: E \to X$ è riv. regolare $\iff$ $Aut(E,p)$ agisce transitivamente sulle fibre

oss Come visto, si ha in questo caso $Aut(E,p) \cong \pi_1(X,x) / p_* \pi_1(E,e)$

dim $\Rightarrow$ ovvia dalla prop precedente e dalle proprietà viste che tutti i $p_* \pi_1(E,e)$ sono coniugati.

$\Leftarrow$ $E/Aut(E,p) \leftrightarrow X$ è una bigezione continua.

oss se $\pi_1(E,e) = 0$ $\Rightarrow$ $Aut(E,p) \cong \pi_1(X,x)$, in particolare E è regolare.

$\exists$? E t.c. $\pi_1(E) = 0$?

def $p: E \to X$ si dice rivestimento universale se E è connesso e semplicemente connesso.

Proprietà universale del rivestimento universale. $E \xrightarrow{p} X$ universale, allora $\forall$ $E' \xrightarrow{p'} X$ ed $e \in E$, $e' \in E'$ con $p(e) = p'(e')$ $\exists !$ $\varphi : (E, e) \to (E', e')$ morfismo

Corollario: due rivestimenti universali sono isomorfi.

dim prop. univ: basta applicare il criterio di sollevamento.

Def. X semilocalmente semplicemente connesso: $\forall x \in X$ $\exists U \ni x$ t.c. $i_* \pi_1(U, x) = 0$ in $\pi_1(X, x)$.

es loc. sempl. connesso $\Rightarrow$ semiloc. sempl. connesso.

es non loc. sempl. connesso e $<$ non semiloc. – / loc. sempl. connesso

Prop. X sp. top. conn e loc. connesso per archi. Se X ha riv. universale $\Rightarrow$ X è semiloc. sempl. connesso.

Dim $U \ni x$ banalizzante, quindi $\exists\, s : U \to E$ con $p \circ s = id$ $\Rightarrow$

$id_* = p_* s_*$ vale 0.

Teo X conn, loc connesso per archi possiede un rivestimento universale $\Leftrightarrow$ è semiloc sempl. connesso.

dim $\Rightarrow$ fatto. $(\Leftarrow)$ Definiamo come insieme $E = \coprod_{x \in X} \dfrac{\Omega(X, x_0, x)}{\sim_{rel\, I}}$ e

$p : E \to X : [\alpha] \to \alpha(1)$. $p^{-1}(x_0) \cong \pi_1(X, x_0)$

Sia, per $[\sigma] \in \Omega(X, x_0, x)$, $U \ni \sigma(1) = x$, $W([\sigma], U) = \{[\sigma'] \mid [\sigma'] = [\sigma][\sigma'']$ $im(\sigma'') \subset U\}$.

I $W([\sigma], U)$ formano base per topologia: $[\sigma] \in W([\sigma], X)$ e se

$[\sigma''] \in W([\sigma], U) \cap W(\sigma', U') \Rightarrow \sigma''(1) \in U \cap U'$ e $W([\sigma''], U \cap U')$

$\subset W([\sigma], U) \cap W([\sigma'], U')$.

p è continua: $U \subset X$ aperto connesso per archi $\Rightarrow p^{-1}(U) = \bigcup_{\sigma(1) \in U} W([\sigma], U)$

p è aperta: $p(W([\sigma], U)) = U$

è un rivestimento: prendiamo U t.c. $i_* \pi_1(U) = 0$, U connesso; se

$\sigma(1) \in U \Rightarrow p: W([\sigma], U) \to U$ è omeomorfismo. Infatti se

se $\sigma'(1) = \sigma''(1)$ in U $(e\ \sigma'(0) = \sigma''(0) = \sigma(1)) \Rightarrow \sigma' \underset{\text{rel } I}{\sim} \sigma''$ quindi

$p|W([\sigma]; U)$ è iniettiva.

$W([\sigma], U) \cap W([\sigma'], U) = \begin{cases} \emptyset \\ W([\sigma], U) \end{cases}$. Infatti se $[\sigma''] \in \cap$

$\sigma'' = \sigma\lambda = \sigma'\lambda' \Rightarrow \sigma' = \sigma\lambda(\lambda')^{-1} \Rightarrow W([\sigma'], U) \subset W([\sigma], U)$

e viceversa per simmetria.

Rimane da dim che E è sempl. connesso. Basta dim che $\sigma : (I, \dot{I}) \to (X, x_0)$ si solleva a un cammino chiuso a partire dal punto base $1 \in \pi_1(X, x_0)$

$\Rightarrow [\sigma] = 1$. Infatti in tal caso $p_* \pi_1(E, 1) = 1$ e quindi si conclude.

Un sollevamento esplicito di σ è dato da $\gamma : (I, 0) \to (E, 1)$ con $\gamma(t)(u) = \sigma(tu)$. Si noti che $\gamma(1) = [\sigma]$, quindi se γ è chiuso allora $[\sigma] = 1$.

<u>Teorema</u> (senza dim). $\forall$ sogr $H \subset \pi_1(X, x_0)$ $\exists$ rivestimento $p : E \to X$ t.c. $p_* \pi_1(E, e) = H$ $(e \in E)$.

(si costruisce come prima prendendo $E = \{[\sigma]\}$ dove $\sigma \sim \tau \Leftrightarrow \sigma \tau^{-1} \in H$).

<u>Teorema</u> (senza dim) $(E, e) \xrightarrow{p} (X, x_0)$ e $(E', e') \xrightarrow{p'} (X, x_0)$ sono isomorfi $(e \to e') \Leftrightarrow p_* \pi_1(E, e) = p'_* \pi_1(E', e')$. Se si trascura il punto base,

sono isomorfi se i loro gruppi sono coniugati.

<u>Corollario</u> Le classi di isomorfismo dei rivestimenti di X corrispondono biettivamente alle classi di coniugio dei sgr di $\pi_1(X, x_0)$.

PRESENTAZIONE DI GRUPPI

G gruppo e $S \subset G$ sottoinsieme di generatori. Se X è un insieme in bijezione con S, tramite $\varphi : X \to G$, allora φ si estende a un unico omomorfismo surgettivo $\hat{\varphi} : F(X) \longrightarrow G$, dove $F(X)$ è il gruppo libero su X. Sia $N = \ker \hat{\varphi}$, per cui $\frac{F}{N} \cong G$.

Gli elementi di N saranno delle parole in X e X^{-1}.

Un <u>insieme completo</u> di relazioni è un insieme di parole $R \subset N$ tale che N sia <u>normalmente generato</u> da R, cioè: t.c. N è il più piccolo sottogruppo normale che contiene R (quindi ogni elemento di N si scriverà come prodotto di coniugati (in $F(X)$) delle parole in $R \cup R^{-1}$). Si scriverà in questo caso $G = \langle X \mid R \rangle$.

Esempi. - Se $G = F(X)$ è gruppo libero allora $N = \{1\}$ quindi si scrive in questo caso semplicemente $F(X) = \langle X \mid \emptyset \rangle$.

- $G = \mathbb{Z}^n$. Sia $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ e $\varphi(x_i) = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-esimo posto}}}{1}, 0, \dots, 0)$.

N è il sottogruppo dei commutatori di $F(X)$.

__esercizio__: $N = \langle x_i x_j x_i^{-1} x_j^{-1},\ i \neq j \in 1, \dots, n \rangle$, dove $\langle\ \rangle$ indica il sottogruppo normale generato. Quindi:

$$\mathbb{Z}^n = \langle x_1, \dots, x_n \mid x_i x_j x_i^{-1} x_i^{-1},\ 1 \le i < j \le n \rangle.$$

- gruppo ciclico $\mathbb{Z}/_{n}\mathbb{Z} = \langle x \mid x^n \rangle$
- Se $G = \langle X \mid R \rangle$, $G' = \langle X' \mid R' \rangle$, con $X \cap X' = \emptyset$,

$$G * G' = \langle X \cup X' \mid \underbrace{R}_{\text{parole in } X},\ \underbrace{R'}_{\text{parole in } X'} \rangle$$

invece:

$$G \times G' = \langle X \cup X' \mid \mathcal{R}, \mathcal{Q}, \; x x' x^{-1} (x')^{-1} \;, \forall x \in X, \; x' \in X' \rangle$$

cioè abbiamo aggiunto che gli elementi di G commutano con quelli di G'.

Se H è un terzo gruppo che ha due omomorfismi $i: H \to G$, $i': H \to G'$, e $T \subset H$ è un insieme di generatori di H, allora una presentazione per il prodotto libero di G e G' con amalgamazione di H

$$G_1 \underset{H}{*} G_2 \overset{def}{=} G_1 * G_2 / \langle i(h)\, i'(h^{-1}),\; h \in H \rangle = G_1 * G_2 / \langle i(t)\, i'(t^{-1}),\; t \in T \rangle$$

è data da:

$$G_1 \underset{H}{*} G_2 = \langle X \cup X' \mid \mathcal{R}, \mathcal{R}', \; i(t)\, i'(t^{-1}) \;, \; t \in T \rangle$$

<u>oss</u>. Per dimostrare che il sgr normale generato da $i(h)\,i'(h^{-1})$, $h\in H$ coincide con quello generato da $i(t)\,i'(t^{-1})$, $t\in T$, basta osservare

$$i(t_1 t_2)\, i'(t_2^{-1} t_1^{-1}) = i(t_1)\, i'(t_1^{-1}) \left[i'(t_1)\, i(t_2)\, i'(t_2)^{-1}\, i'(t_1)^{-1} \right]$$

e ancora che ogni $h\in H$ è prodotto di elementi in $T\cup T^{-1}$.

Teorema (Van Kampen)

$X = A_1 \cup A_2$, $A_1, A_2, A_1 \cap A_2$ connessi per archi. Allora $(x_0 \in A_1 \cap A_2)$

$$\pi_1(X, x_0) \doteq \pi_1(A_1, x_0) \underset{\pi_1(A_1 \cap A_2, x_0)}{*} \pi_1(A_2, x_0)$$

prodotto libero con amalgamazione di $(i_1)_* : \pi_1(A_1 \cap A_2, x_0) \longrightarrow \pi_1(A_1, x_0)$

$(i_2)_* : \pi_1(A_1 \cap A_2, x_0) \longrightarrow \pi_1(A_2, x_0)$

dim.

I) $\pi_1(A_1, x_0) * \pi_1(A_2, x_0) \xrightarrow{\varphi} \pi_1(X, x_0)$ è surgettiva.

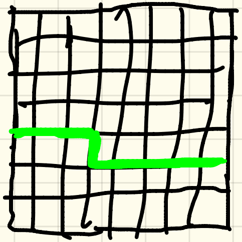
$\sigma : I, \dot{I} \to X, x_0$, prendiamo partizione $t_0 < \dots < t_m$ tale che $\sigma([t_i, t_{i+1}]) \subset A_1$ o in A_2 successivamente. Allora si prendono un cammino in $A_1 \cap A_2$ tra x_0 e $\sigma(t_i)$ si trova la surgettività...

II) Dimostriamo che $\ker \varphi$ è il sottogruppo normale generato dalle $(i_1)_*(t)(i_2)_*(t^{-1})$, $t \in \pi_1(A_1 \cap A_2, x_0)$

Sia $[f_1] \cdots [f_m]$ una parola in $\pi_1(A_1, x_0) * \pi_1(A_2, x_0)$ tale che $\varphi([f_1] \cdots [f_n]) = 1 \in \pi_1(X, x_0)$. Allora il cammino $f = f_1 \cdots f_n \sim 0$ (rel $\dot{I}$) in X. Sia $F : I^2 \longrightarrow X$ un'omotopia t.c. $F(I\times\{0\}) = x_0$, $F(t,1) = f(t)$, $\forall t \in [0,1]$, $F(\{0,1\}\times I) = x_0$. Dividiamo I^2 in rettangolini $[t_i, t_{i+1}]\times[s_j, s_{j+1}] = R_{ij}$ tramite una partizione $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ e una partizione $s_0 = 0 < s_1 < \dots < s_r = 1$, in modo tale che $\forall R_{ij} \subset$

$\subset F^{-1}(A_1)$ o $F^{-1}(A_2)$. Congiungiamo ogni $P_{ij} = F(t_i, s_j)$ tramite un cammino γ_{ij} con x_0, richiedendo che $\gamma_{ij} \subset A_K$ se $P_{ij} \in A_K$. Quindi $\gamma_{ij} \subset A_1 \cap A_2$ se $P_{ij} \in A_1 \cap A_2$. Supponiamo anche che la partizione $\{x_i\}$ includa i punti estremi dei vari f_i che compongono il cammino f; tali punti sono mandati da $f = F|_{I\times\{1\}}$ in x_0. Supponiamo anche che $\forall P_{ij}$ t.c. $F(P_{ij}) = 0$, si prende il corrispondente γ_{ij} costante $\equiv x_0$.

Ordiniamo i rettangoli R_{ij} lessicograficamente (quindi da sinistra a destra partendo dal basso) e sia $\Gamma_m \subset I^2$ il cammino che separa i primi m rettangoli dai rimanenti, partendo dal lato $\{0\} \times I$ e arrivando al lato $\{1\} \times I$



Allora $F|_{\Gamma_m} : \Gamma_m \to X$ definisce un cammino chiuso in X la cui classe indichiamo con $[\Gamma_m] \in \pi_1(X, x_0)$. Si ha che il primo dei Γ_m, Γ_0 è il lato $I \times \{0\} \subset I^2$ e perciò $[\Gamma_0] = 1 \in \pi_1(X, x_0)$, e l'ultimo dei Γ_m, Γ_N è il lato $I \times \{1\}$ e quindi $[\Gamma_m] = [f]$ ($N = \#$ rettangolini $= uv$).

Se Γ_m si compone dei segmenti $[t_0=0, s_k] \cup [t_1, s_k] \cup \dots \cup [t_{r_2}, s_k] \cup$
$\cup [t_{r_2}, s_{k-1}] \cup [t_{r_2+1}, s_{k-1}] \cup \dots \cup [t_R = 1, s_{k-1}]$ allora i cammini

$$\Gamma_{m,0} = \gamma_{0k} F|_{[t_0, s_k]} \gamma_{1,k}^{-1},\ \Gamma_{m,1} = \gamma_{1k} F|_{[t_1, s_k]} \gamma_{2,k}^{-1},\ \Gamma_{m,2} = \gamma_{2k} F|_{[t_2, s_k]} \gamma_{3k}^{-1}$$

... ecc. (fino a $\Gamma_{m,m}$)

ottenuti da $F|_{\text{segmento}}$ aggiungendo le "code" che congiungono i punti estremi con x_0, sono una successione di cammini chiusi con punto base x_0 tali che $\Gamma_m \sim \Gamma_{m,0} \Gamma_{m,1} \cdots \Gamma_{m,m}$ (nel $\dot{I}$).

Inoltre ogni $\Gamma_{m,j}$ è completamente contenuto o in A_1 o in A_2, oppure in $A_1 \cap A_2$.

$\forall m$ scriviamo allora la parola $g_m = [\Gamma_{m,0}]_{i_0} [\Gamma_{m,1}]_{i_1} \cdots [\Gamma_{m,m}]_{i_m}$ $\in \pi_1(A_1, x_0) * \pi_2(A_2, x_0)$ dove

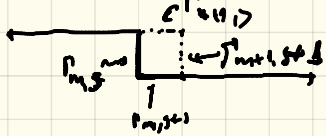
$[\Gamma_{m,j}]_{i_j} \in \pi_1(A_{i_j}, x_0)$. Qui $\forall\ \Gamma_{m,j}$ abbiamo scelto un $A_{i_j} \supset \Gamma_{m,j}$. Se $\Gamma_{m,j}$ è contenuto in uno solo degli A_i, la scelta è obbligata; se invece $\Gamma_{m,j} \subset A_1 \cap A_2$ avremmo potuto scegliere l'altro aperto (di indice $1-i_j$), ma la parola g_m così ottenuta sta nella stessa classe laterale di g_m rispetto al sottogruppo $N = \langle (i_1)_*(t)(i_2)_*(t^{-1}) \mid t \in \pi_1(A_1 \cap A_2, x_0) \rangle$ (facile verifica!)

Scegliamo l'ultima fattorizzazione g_N di $[\Gamma_N] = [f]$ compatibile con quella data $[f_1] \cdots [f_n]$.

Si noti anche che la scelta la fattorizzazione g_m di $[\Gamma_m]$ corrisponde a un elemento $g_m \in \pi_1(A_1, x_0) * \pi_1(A_2, x_0)$ t. c.

$\psi(g_m) = [\Gamma_m]$.

Per concludere osserviamo che la prima fattorizzazione $g_0 \in N$ ovviamente;
Quando si passa da Γ_m a Γ_{m+1} si sostituiscono due lati di un rettangolo $R_{\alpha,\beta}$ con gli altri due: $\Gamma_{m,j} \cup \Gamma_{m,j+1} \to \Gamma_{m+1,j} \cup \Gamma_{m+1,j+1}$



Sia $R_{\alpha,\beta} \subset A_i$. Allora $[\Gamma_{m,j}]_i [\Gamma_{m,j+1}]_i = [\Gamma_{m+1,j}]_i [\Gamma_{m+1,j+1}]_i$ (*)
(usando $F|_{R_{\alpha\beta}}$). Quindi le due fattorizzazioni g_m, g_{m+1} sono nella stessa classe laterale modulo N: infatti se per qualcuno dei fattori $[\Gamma_{m,j}]_{i_j}$, $[\Gamma_{m,j+1}]_{i_{j+1}}$, oppure $[\Gamma_{m+1,j}]_{i'_j}$, $[\Gamma_{m+1,j+1}]_{i'_{j+1}}$ l'indice scelto era diverso da i (quindi il corrispondente fattore $\subset A_1 \cap A_2$) possiamo cambiarlo in i

rimanendo nella stessa classe laterale mod N (come osservato sopra), applicare l'equivalenza $(*)$ e poi eventualmente ritornare agli indici scelti per g_{m+1}.

Siccome $g_0 \in N$, si ha per induzione che tutti i $g_m \in N$, e in particolare $g_N \in N$.

$\underline{QED}$