Matematica - Ingegneria Gestionale - Prova scritta del 29 maggio 2006 - A -

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matr. ____________________

PRIMA PARTE / $\boxed{\text{non svolgo questa parte - intendo usare il primo compitino}}$

1. Si calcolino (8p.)

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+4n}{n^2+1}\right)^n = \quad e^4, \qquad \lim_{n\to+\infty} n(\sqrt[3]{n^3+4}-\sqrt{n^2-5}) = \quad \frac{5}{2},$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{5n+1} = \quad 1, \qquad \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{5^n+n-1} = \quad 5.$$

2. Si scriva il polinomio di Taylor di ordine tre per $f(x) := \sqrt{5+\ln(x)}$, in $x_0 = 1$ (3p.):
$P_3(x) = \sqrt{5} + \frac{\sqrt{5}}{10}(x-1) - \frac{11\sqrt{5}}{200}(x-1)^2 + \frac{233\sqrt{5}}{6000}(x-1)^3$

3. Si calcoli il seguente limite (7p.): $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{3+e^{2x}+\ln(1+2x)}-2-x}{x^2}$.
Questo esercizio va $\boxed{\text{SVOLTO}}$ (sinteticamente) sulle facciate libere di questo foglio.

SECONDA PARTE / $\boxed{\text{non svolgo questa parte - intendo usare il secondo compitino}}$

1. Per ognuno dei seguenti casi si indichi se la serie indicata converge assolutamente (barrare la casella $\boxed{\text{AC}}$), converge ma non converge assolutamente (barrare $\boxed{\text{C}}$) oppure non converge (barrare $\boxed{\text{NC}}$) (4p.)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{1+n^2} \quad \boxed{\text{AC}}\ \boxed{\cancel{\text{C}}}\ \boxed{\text{NC}}; \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{1+n!} \quad \boxed{\cancel{\text{AC}}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\text{NC}};$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\cos(1/n)-3^{1/n^2} \quad \boxed{\cancel{\text{AC}}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\text{NC}}; \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{1+3^{-n}+n^2} \quad \boxed{\text{AC}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\cancel{\text{NC}}}.$$

2. Si calcoli il seguente integrale improprio; se si ritiene che non esista si barri la casella $\boxed{\text{N.E.}}$ (non esiste) (p.4)

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{2x+4}{(x^2+1)(x-1)}\,dx = \frac{-2}{4}\pi, \boxed{\text{N.E.}}$$

3. Sia $f(x,y) := \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+e^{xy}$. Si trovi un (eventuale) punto di minimo per f (3p.):

$$(x_{min}, y_{min}) = \pm\left(\sqrt{\frac{2}{3}\ln(3)}, -\sqrt{\frac{3}{2}\ln(3)}\right) / \boxed{f \text{ non ha minimo}}$$

4. Si consideri la seguente equazione differenziale:

$$y' = \frac{1}{2x}y + 1 - \frac{1}{x} \qquad \text{per } x > 0$$

(a) Per ogni y_0 in $\mathbf{R}$ si trovi la soluzione y tale che $y(1) = y_0$ (1p.).
(b) Al variare di y_0 si calcolino i limiti di $y(x)$ per $x \to 0^+$ e per $x \to +\infty$ (2 p.).
(c) Si traccino i grafici delle soluzioni $y(x)$ corrispondenti ai valori di y_0 che si ritengono più significativi (2p.).
(d) Si dica per quali y_0 l'equazione $y(x) = 0$ ha due soluzioni (distinte) (2p.).

Matematica - Ingegneria Gestionale - Prova scritta del 29 maggio 2006 - B -

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matr. ______________________

PRIMA PARTE / $\boxed{\text{non svolgo questa parte - intendo usare il primo compitino}}$

1. Si calcolino (8p.)

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+5n}{n^2+1}\right)^n = \quad e^5, \qquad \lim_{n\to+\infty} n(\sqrt[3]{n^3+5}-\sqrt{n^2-2}) = \quad \frac{2}{2},$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2n+1} = \quad 1, \qquad \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{3^n+n-1} = \quad 3.$$

2. Si scriva il polinomio di Taylor di ordine tre per $f(x) := \sqrt{3+\ln(x)}$, in $x_0 = 1$ (3p.):
$P_3(x) = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{6}(x-1) - \frac{7\sqrt{3}}{72}(x-1)^2 + \frac{31\sqrt{3}}{432}(x-1)^3$

3. Si calcoli il seguente limite (7p.): $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{3+e^{2x}+\ln(1+2x)}-2-x}{x^2}$.
Questo esercizio va $\boxed{\text{SVOLTO}}$ (sinteticamente) sulle facciate libere di questo foglio.

SECONDA PARTE / $\boxed{\text{non svolgo questa parte - intendo usare il secondo compitino}}$

1. Per ognuno dei seguenti casi si indichi se la serie indicata converge assolutamente (barrare la casella $\boxed{\text{AC}}$), converge ma non converge assolutamente (barrare $\boxed{\text{C}}$) oppure non converge (barrare $\boxed{\text{NC}}$) (4p.)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{1+n^2} \qquad \boxed{\text{AC}}\ \boxed{\cancel{\text{C}}}\ \boxed{\text{NC}}; \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{1+n!} \qquad \boxed{\text{A}\cancel{\text{C}}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\text{NC}};$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\cos(1/n)-3^{1/n^2} \qquad \boxed{\text{A}\cancel{\text{C}}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\text{NC}}; \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{1+3^{-n}+n^2} \qquad \boxed{\text{AC}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\text{N}\cancel{\text{C}}}.$$

2. Si calcoli il seguente integrale improprio; se si ritiene che non esista si barri la casella $\boxed{\text{N.E.}}$ (non esiste) (p.4)

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{2x+5}{(x^2+1)(x-1)}\,dx = \frac{-3}{4}\pi, \boxed{\text{N.E.}}$$

3. Sia $f(x,y) := \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+e^{xy}$. Si trovi un (eventuale) punto di minimo per f (3p.):

$$(x_{min}, y_{min}) = \pm\left(\sqrt{\frac{3}{2}\ln(3)}, -\sqrt{\frac{2}{3}\ln(3)}\right) / \boxed{f \text{ non ha minimo}}$$

4. Si consideri la seguente equazione differenziale:

$$y' = \frac{1}{2x}y + 1 - \frac{1}{x} \qquad \text{per } x > 0$$

   (a) Per ogni y_0 in $\mathbf{R}$ si trovi la soluzione y tale che $y(1) = y_0$ (1p.).
   (b) Al variare di y_0 si calcolino i limiti di $y(x)$ per $x \to 0^+$ e per $x \to +\infty$ (2 p.).
   (c) Si traccino i grafici delle soluzioni $y(x)$ corrispondenti ai valori di y_0 che si ritengono più significativi (2p.).
   (d) Si dica per quali y_0 l'equazione $y(x) = 0$ ha due soluzioni (distinte) (2p.).

Matematica - Ingegneria Gestionale - Prova scritta del 29 maggio 2006 - C -

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matr. ____________________

PRIMA PARTE / $\boxed{\text{non svolgo questa parte - intendo usare il primo compitino}}$

1. Si calcolino (8p.)

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+6n}{n^2+1}\right)^n = \qquad e^6, \qquad \lim_{n\to+\infty} n(\sqrt[3]{n^3+6}-\sqrt{n^2-3}) = \qquad \frac{3}{2},$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{3n+1} = \qquad 1, \qquad \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{4^n+n-1} = \qquad 4.$$

2. Si scriva il polinomio di Taylor di ordine tre per $f(x) := \sqrt{4+\ln(x)}$, in $x_0 = 1$ (3p.):
$P_3(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-1) - \frac{9}{64}(x-1)^2 + \frac{155}{1536}(x-1)^3$

3. Si calcoli il seguente limite (7p.): $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{3+e^{2x}+\ln(1+2x)}-2-x}{x^2}$.
Questo esercizio va $\boxed{\text{SVOLTO}}$ (sinteticamente) sulle facciate libere di questo foglio.

SECONDA PARTE / $\boxed{\text{non svolgo questa parte - intendo usare il secondo compitino}}$

1. Per ognuno dei seguenti casi si indichi se la serie indicata converge assolutamente (barrare la casella $\boxed{\text{AC}}$), converge ma non converge assolutamente (barrare $\boxed{\text{C}}$) oppure non converge (barrare $\boxed{\text{NC}}$) (4p.)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{1+n^2} \quad \boxed{\text{AC}}\ \boxed{\cancel{\text{C}}}\ \boxed{\text{NC}}; \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{1+n!} \quad \boxed{\text{A}\cancel{\text{C}}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\text{NC}};$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\cos(1/n)-3^{1/n^2} \quad \boxed{\text{A}\cancel{\text{C}}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\text{NC}}; \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{1+3^{-n}+n^2} \quad \boxed{\text{AC}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\text{N}\cancel{\text{C}}}.$$

2. Si calcoli il seguente integrale improprio; se si ritiene che non esista si barri la casella $\boxed{\text{N.E.}}$ (non esiste) (p.4)

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{2x+6}{(x^2+1)(x-1)}\,dx = \frac{-4}{4}\pi, \boxed{\text{N.E.}}$$

3. Sia $f(x,y) := \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+e^{xy}$. Si trovi un (eventuale) punto di minimo per f (3p.):

$$(x_{min}, y_{min}) = \pm\left(\sqrt{\frac{4}{3}\ln(6)}, -\sqrt{\frac{3}{4}\ln(6)}\right) / \boxed{f \text{ non ha minimo}}$$

4. Si consideri la seguente equazione differenziale:

$$y' = \frac{1}{2x}y + 1 - \frac{1}{x} \qquad \text{per } x > 0$$

   (a) Per ogni y_0 in $\mathbf{R}$ si trovi la soluzione y tale che $y(1) = y_0$ (1p.).
   (b) Al variare di y_0 si calcolino i limiti di $y(x)$ per $x \to 0^+$ e per $x \to +\infty$ (2 p.).
   (c) Si traccino i grafici delle soluzioni $y(x)$ corrispondenti ai valori di y_0 che si ritengono più significativi (2p.).
   (d) Si dica per quali y_0 l'equazione $y(x) = 0$ ha due soluzioni (distinte) (2p.).

Matematica - Ingegneria Gestionale - Prova scritta del 29 maggio 2006 - D -

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matr. ____________________

PRIMA PARTE / $\boxed{\text{non svolgo questa parte - intendo usare il primo compitino}}$

1. Si calcolino (8p.)

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+7n}{n^2+1}\right)^n = \qquad e^7, \qquad \lim_{n\to+\infty} n(\sqrt[3]{n^3+7}-\sqrt{n^2-4}) = \qquad \frac{4}{2},$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{4n+1} = \qquad 1, \qquad \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2^n+n-1} = \qquad 2.$$

2. Si scriva il polinomio di Taylor di ordine tre per $f(x) := \sqrt{2+\ln(x)}$, in $x_0 = 1$ (3p.):
$P_3(x) = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}(x-1) - \frac{5\sqrt{2}}{32}(x-1)^2 + \frac{47\sqrt{2}}{384}(x-1)^3$

3. Si calcoli il seguente limite (7p.): $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{3+e^{2x}+\ln(1+2x)}-2-x}{x^2}$.
Questo esercizio va $\boxed{\text{SVOLTO}}$ (sinteticamente) sulle facciate libere di questo foglio.

SECONDA PARTE / $\boxed{\text{non svolgo questa parte - intendo usare il secondo compitino}}$

1. Per ognuno dei seguenti casi si indichi se la serie indicata converge assolutamente (barrare la casella $\boxed{\text{AC}}$), converge ma non converge assolutamente (barrare $\boxed{\text{C}}$) oppure non converge (barrare $\boxed{\text{NC}}$) (4p.)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{1+n^2} \quad \boxed{\text{AC}}\ \boxed{\cancel{\text{C}}}\ \boxed{\text{NC}}; \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{1+n!} \quad \boxed{\cancel{\text{AC}}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\text{NC}};$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\cos(1/n)-3^{1/n^2} \quad \boxed{\cancel{\text{AC}}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\text{NC}}; \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{1+3^{-n}+n^2} \quad \boxed{\text{AC}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\cancel{\text{NC}}}.$$

2. Si calcoli il seguente integrale improprio; se si ritiene che non esista si barri la casella $\boxed{\text{N.E.}}$ (non esiste) (p.4)

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{2x+7}{(x^2+1)(x-1)}\,dx = \frac{-5}{4}\pi, \boxed{\text{N.E.}}$$

3. Sia $f(x,y) := \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}+e^{xy}$. Si trovi un (eventuale) punto di minimo per f (3p.):

$$(x_{min}, y_{min}) = \pm\left(\sqrt{\frac{3}{4}\ln(6)}, -\sqrt{\frac{4}{3}\ln(6)}\right) / \boxed{f \text{ non ha minimo}}$$

4. Si consideri la seguente equazione differenziale:

$$y' = \frac{1}{2x}y + 1 - \frac{1}{x} \qquad \text{per } x > 0$$

   (a) Per ogni y_0 in $\mathbf{R}$ si trovi la soluzione y tale che $y(1) = y_0$ (1p.).
   (b) Al variare di y_0 si calcolino i limiti di $y(x)$ per $x \to 0^+$ e per $x \to +\infty$ (2 p.).
   (c) Si traccino i grafici delle soluzioni $y(x)$ corrispondenti ai valori di y_0 che si ritengono più significativi (2p.).
   (d) Si dica per quali y_0 l'equazione $y(x) = 0$ ha due soluzioni (distinte) (2p.).

Svolgimento del limite

$$\sqrt{3+e^{2x}+\ln(1+2x)} = \sqrt{3+1+2x+2x^2+o(x^2)+2x-2x^2+o(x^2)} =$$
$$\sqrt{4+4x+o(x^2)} = 2\sqrt{1+x+o(x^2)} = 2\left(1+\frac{x+o(x^2)}{2}-\frac{(x+o(x^2))^2}{8}+o((x+o(x^2)^2)\right) =$$
$$2\left(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o(x^2)\right) = 2+x-\frac{x^2}{4}+o(x^2)$$

Dunque

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{3+e^{2x}+\ln(1+2x)}-2-x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{x^2}{4}+o(x^2)}{x^2} = -\frac{1}{4}$$

Svolgimento dell' equazione differenziale

Dalla formula risolutiva

$$y(x) = \sqrt{x}\left(y_0+\int_1^x\left(1-\frac{1}{t}\right)\frac{1}{\sqrt{t}}\,dt\right) = \sqrt{x}\left(y_0+\int_1^x\left(t^{-1/2}-t^{-3/2}\right)\,dt\right) =$$
$$\sqrt{x}\left(y_0+\left[\left(2t^{1/2}+2t^{-1/2}\right)\right]_1^x\right) = \sqrt{x}\left(y_0+2\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}-4\right) =$$
$$\boxed{C\sqrt{x}+2x+2} \qquad \text{dove } C = y_0-4$$

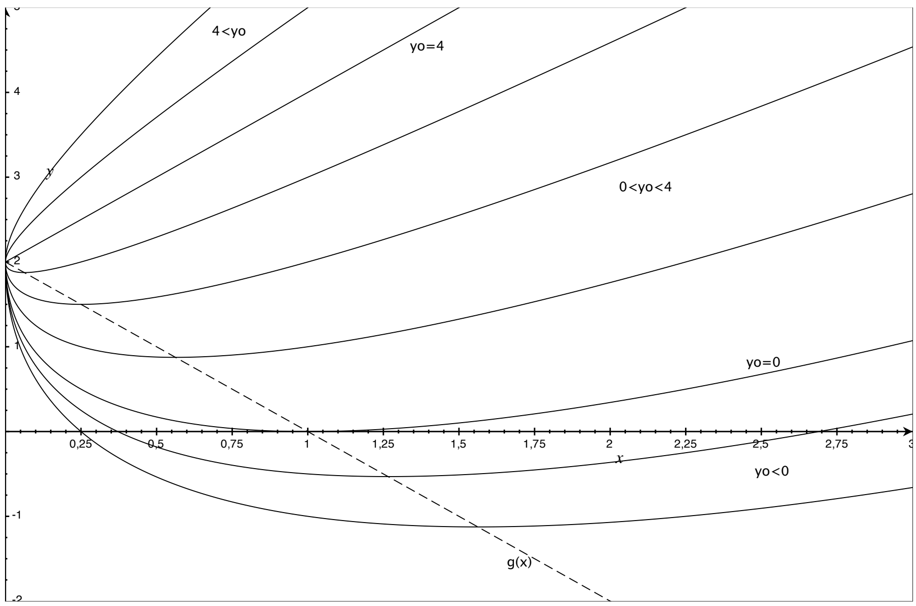
Dunque

$$\lim_{x\to 0^+} y(x) = \begin{cases} 2^+ & \text{se } C\geq 0 \Leftrightarrow y_0\geq 4 \\ 2^- & \text{se } C<0 \Leftrightarrow y_0<4 \end{cases} \quad , \qquad \lim_{x\to+\infty} y(x) = +\infty.$$

Se poniamo $F(x,y) := \dfrac{y}{2x}+1-\dfrac{1}{x}$, di modo che l'equazione diventa $y' = F(x,y)$, allora si vede facilmente che, per le $x>0$

$$F(x,y)\geq 0 \Leftrightarrow y\geq 2(1-x) =: g(x)$$

Il grafico di g è una retta passante per $(0,2)$ e $(1,0)$. Tenendo presente che $y(x)$ cresce/decresce se $y(x)\geq g(x)/y(x)\leq g(x)$, si perviene ai grafici rappresentati nella figura.



Esaminando i grafici si vede che $y(x)$ passa due volte per l'asse delle x se e solo se $y_0<0$.