

Complementi di Matematica - Ingegneria Energetica/Elettrica/Sicurezza  
Prova scritta del 14 settembre 2009

PRIMA PARTE (per tutti)

(a.1) Sia  $\alpha$  un parametro reale e si consideri la successione di funzioni  $f_n : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbf{R}$  definite da  $f_n(x) := n^\alpha e^{-nx}$ .

1. Si dica per quali valori di  $\alpha$  la successione  $(f_n)$  converge uniformemente su  $[0, +\infty[$ ;
2. Si trovi l'insieme degli  $\alpha$  per cui la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  converge totalmente su  $[0, +\infty[$ .
3. Si dica se per  $\alpha = 100$  la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  converge uniformemente su  $[1, +\infty[$ .
4. (\*) Si trovi l'insieme degli  $\alpha$  per cui la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$  converge uniformemente su  $[0, +\infty[$ . Può essere utile a tal fine ricordare la formula  $\sum_{j=1}^k j = \frac{k(k+1)}{2}$ .

(a.2) Si calcoli l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \sin(x)}{(x^4 + 8x^2 + 16)} dx.$$

(b.1) Si trovino tutte le soluzioni del problema differenziale su  $\mathbf{R}$ :

$$\begin{cases} y'' - 4y' = te^{-|t|} \\ y \in L^2(\mathbf{R}) \end{cases}.$$

(b.2) Dati il parametro reale  $\alpha$  e la successione di funzioni del punto (a.1)

1. si trovino i valori di  $\alpha$  per cui la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  converge in  $L^1([0, +\infty[)$ ;
2. si dica se, per  $\alpha = \frac{1}{4}$ , la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  converge in  $L^2([0, 1])$

SECONDA PARTE (solo per gli energetici)

(c.1) (a) Si trovi la soluzione del problema:

$$\begin{cases} y'' - y = H(t) \cos(t) \\ y(t) = 0 \text{ per } t < 0. \end{cases}$$

(b) si calcolino  $y'''(t)$  e  $y^{iv}(t)$  (le derivate di ordine tre e quattro di  $y(t)$ ) nel senso delle distribuzioni.

(c.2) (a) Si utilizzi la trasformata di Fourier per trovare tutte le soluzioni del problema:

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = \delta' \\ y \in \mathcal{S}'. \end{cases}$$

(b) Si verifichi, usando le proprietà delle distribuzioni, che le  $y(t)$  trovate sono effettivamente soluzioni dell'equazione proposta.