

PRIMA PARTE (per tutti)

(a.1) Sia α un parametro reale e si consideri la successione di funzioni $f_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ definite

$$\text{da } f_n(x) := \frac{n^\alpha x^2}{n^3 + x^3}.$$

1. Si dica per quali valori di α la successione (f_n) converge uniformemente su $[0, +\infty[$;
2. Si trovi l'insieme degli α per cui la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge totalmente su $[0, +\infty[$.
3. Si dica se per $\alpha = 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente su $[0, 1]$.
4. (★) Si trovi l'insieme degli α per cui la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge uniformemente su $[0, +\infty[$. Può essere utile a tal fine ricordare la formula $\sum_{j=1}^k j = \frac{k(k+1)}{2}$.

(a.2) Si calcoli l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x(x^4 + 4x^2 + 4)} dx.$$

(b.1) Si trovino tutte le soluzioni del problema differenziale su \mathbf{R} :

$$\begin{cases} y'' - 4y = e^{-|t|} \\ y \in L^2(\mathbf{R}) \end{cases}.$$

(b.2) Dati il parametro reale α e la successione di funzioni del punto (a.1)

1. si trovino i valori di α per cui la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge in $L^1([0, 1])$; per questo punto e' utile ricordare che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha \ln(1/n)$ converge se e solo se $\alpha < -1$;
2. si dica se ci sono degli α in \mathbf{R} tali che la serie converge in $L^1([0, +\infty[)$;
3. si dica se, per $\alpha = -1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge in $L^2([0, +\infty[)$

SECONDA PARTE (solo per gli energetici)

(c.1) (a) Si trovi la soluzione del problema:

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = H(t)e^t \\ y(t) = 0 \text{ per } t < 0. \end{cases}$$

(b) si calcolino $y'''(t)$ e $y^{iv}(t)$ (le derivate di ordine tre e quattro di $y(t)$) nel senso delle distribuzioni.

(c.2) (a) Si utilizzi la trasformata di Fourier per trovare tutte le soluzioni del problema:

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = \delta' \\ y \in \mathcal{S}'. \end{cases}$$

(b) Si verifichi, usando le proprietà delle distribuzioni, che la $y(t)$ trovata è effettivamente una soluzione dell'equazione proposta.