Statistica - CPS
Corso di Laurea in Informatica
Compito del 23-03-2023

Esercizio 1. (8 punti) La radio di un satellite artificiale è alimentata da 4 batterie che funzionano indipendentemente: la radio trasmette dati se almeno 2 batterie sono in funzione.
Si supponga che la durata di vita in anni di ogni batteria sia una v.a. esponenziale di parametro $\lambda = 0.5$, indipendente dalla durata di vita di ogni altra batteria, e che da terra non sia possibile riattivare le batterie eventualmente guastate.
Calcolare la probabilità:

(i) che dopo 4 anni la radio trasmetta ancora dati;

(ii) che dopo 4 anni la radio trasmetta ancora, ma non tutte le batterie siano in funzione.

Esercizio 2. (12 punti) Si consideri la funzione f definita da

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & \text{se } 0 < x < 2; \\ 0, & \text{altrove.} \end{cases}$$

dove a e b sono due parametri reali.

(i) Dire per quali valori dei parametri a e b la funzione sopra scritta è una densità di probabilità.

(ii) Assegnata una v.a. X con la densità sopra scritta, dire per quali valori dei parametri il suo valore atteso è massimo.

Per il resto dell'esercizio si fissino i valori di a e b trovati al punto (ii).

(iii) Trovare una formula per il β-quantile di una variabile con la densità sopra scritta.

(iv) Assegnate 98 v.a. $X_1, \ldots, X_{98}$ equidistribuite con la densità sopra scritta ed indipendenti, calcolare approssimativamente

$$\mathbb{P}\left\{X_1 + X_2 + \ldots X_{98} > 126\right\}.$$

Esercizio 3. (10 punti) Il dirigente di una ditta produttrice di bilance di precisione afferma che i prodotti della propria ditta rispettano la normativa del proprio paese, normativa che prevede che l'errore commesso dalla bilancia abbia deviazione standard non superiore a $\sigma_0 = 0.1$ g.
Pesando 81 volte un campione da 1 kg con una bilancia prodotta dalla ditta si ottiene un valore $\bar{m} = 999.95$ g per la media empirica delle pesate, e un valore $\bar{\sigma} = 0.12$ g per la deviazione standard campionaria delle pesate.

(i) È possibile accettare l'affermazione del dirigente della ditta al livello 0.05?

(ii) Calcolare il relativo p-value, e determinare un possibile valore limite della normativa per cui il p-value risulti maggiore o uguale a 0.25.

Esercizio 1) Indichiamo con X_1, X_2, X_3, X_4 le v.a. che indica la durata delle 4 batterie. Sappiamo che le $\{X_i\}$ sono indipendenti ed equidistribuite con densità esponenziale di parametro $\lambda = 0.5$.

(i) Poiché la radio funziona se almeno 2 batterie sono funzionanti,

$\mathbb{P}\{$ la radio funzioni dopo 4 anni $\} =$

$= \mathbb{P}\{$ almeno 2 batterie sono funzionanti dopo 4 anni $\}$

Indichiamo con Y_i le v.a. di Bernoulli che vale 0 se la batteria i-esima non funziona dopo 4 anni, e vale 1 se la batteria i-esima funziona dopo 4 anni. Per ipotesi, le v.a. Y_i sono indipendenti ed equidistribuite con

$$\boxed{p = \mathbb{P}(Y_i = 1) = \mathbb{P}(X_i \geq 4) = \int_4^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}}\, dx = \left[-e^{-\frac{x}{2}}\right]_4^{+\infty} = e^{-2}}$$

quindi $Z = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 \sim B(4, p)$ binomiale di parametri 4 e $p = e^{-2}$.

Possiamo quindi scrivere che

$\boxed{\mathbb{P}\{\text{la radio funzioni dopo 4 anni}\} =}$

$= \mathbb{P}\{$ almeno 2 batterie sono funzionanti dopo 4 anni $\} =$

$$= \mathbb{P}\{Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 \geq 2\} = \mathbb{P}\{Z \geq 2\} = 1 - [\mathbb{P}(Z=0) + \mathbb{P}(Z=1)] =$$

$$= 1 - \left[\binom{4}{0} p^0 (1-p)^4 + \binom{4}{1} p^1 (1-p)^3\right] =$$

$$= 1 - \left[(1-e^{-2})^4 + 4e^{-2}(1-e^{-2})^3\right] = \boxed{1 - (1-e^{-2})^3 (1 + 3e^{-2}).}$$

(ii) Utilizzando le notazioni del punto (i), possiamo scrivere

$\boxed{\mathbb{P}\{\text{la radio funzioni dopo 4 anni ma non tutte le batterie funzionano}\} =}$

$= \mathbb{P}\{$ almeno 2 batterie ma non tutte e 4 sono funzionanti dopo 4 anni $\} =$

$$= \mathbb{P}\{2 \leq Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 \leq 3\} = \mathbb{P}\{Z = 2\} + \mathbb{P}\{Z = 3\} =$$

$$= \binom{4}{2} p^2 (1-p)^2 + \binom{4}{3} p^3 (1-p)^1 = 6e^{-4}(1-e^{-2})^2 + 4e^{-6}(1-e^{-2}) = \boxed{2e^{-4}(1-e^{-2})(3-e^{-2})}$$

Esercizio 2

$$f(x) = \begin{cases} ax+b, & x \in (0,2) \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

(i) La funzione f è la densità di una v.a. se verifica tre condizioni: (a) $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$; (b) f è integrabile ; (c) $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1$.

La condizione (b) è verificata $\forall a, b \in \mathbb{R}$ poiché f risulta comunque essere continua in ogni punto $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,2\}$.

La condizione (c) si scrive come

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^2 (ax+b)\,dx = \left[\frac{1}{2}ax^2 + bx\right]_0^2 = 2a + 2b$$

da cui "$\underline{a + b = \frac{1}{2}}$"

La condizione (a) è equivalente a "$f(0) \geq 0$ e $f(2) \geq 0$". Quindi si scrive come "$\underline{b \geq 0 \text{ e } 2a + b \geq 0}$"

Mettendo insieme le condizioni trovate si ha

$$\boxed{0 \leq b \leq 1, \quad a = \frac{1}{2} - b}$$

(ii) Se X è una v.a. con densità $f(x)$ si ha

$$E[X] = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\,dx = \int_0^2 x(ax+b)\,dx = \int_0^2 (ax^2 + bx)\,dx =$$

$$= \left[\frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{2}bx^2\right]_0^2 = \frac{8}{3}a + 2b = \frac{8}{3}\left(\frac{1}{2} - b\right) + 2b = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}b$$

Quindi il valore massimo di $E[X]$ per $b \in [0,1]$ si ottiene per $\boxed{b=0}$ e $\boxed{a = \frac{1}{2}}$, e vale $E[X]\Big|_{b=0} = \frac{4}{3}$.

(iii) Poniamo $a = \frac{1}{2}$ e $b = 0$. Calcoliamo la funzione di ripartizione di una v.a. X con densità $f(x)$. Si ha

$$F_X(x) = \mathbb{P}\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 0 \\ 0 + \int_0^x \frac{1}{2}t\,dt = \frac{1}{4}x^2, & \text{se } x \in [0,2] \\ 1, & \text{se } x \geq 2. \end{cases}$$

Quindi $\forall \beta \in (0,1)$ si ha $F_X(r_\beta) = \beta \iff \frac{1}{4} r_\beta^2 = \beta$

$\implies$ il β-quantile è $\boxed{r_\beta = 2\sqrt{\beta} \quad \forall \beta \in (0,1).}$

(iv) Siano $X_1, \dots, X_{98}$ v.a. indipendenti ed equidistribuite con densità $f(x)$ con $a = \frac{1}{2}$ e $b = 0$.

Si ha $E[X_i] = 4/3 \quad \forall i$ e

$$Var(X_i) = E[X_i^2] - E[X_i]^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)\, dx - \frac{16}{9} = \int_0^2 \frac{1}{2} x^3\, dx - \frac{16}{9} =$$

$$= \left[\frac{1}{8} x^4\right]_0^2 - \frac{16}{9} = 2 - \frac{16}{9} = \frac{2}{9}$$

quindi applicando il Teorema del Limite Centrale con $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$\boxed{\mathbb{P}\{X_1 + \dots + X_{98} > 126\}} = \mathbb{P}\left\{\frac{X_1 + \dots + X_{98} - E[X_i]\cdot 98}{\sqrt{98 \cdot Var(X_i)}} > \frac{126 - E[X_i]\cdot 98}{\sqrt{98\cdot Var(X_i)}}\right\} \sim$$

$$\sim \mathbb{P}\left\{ Z > \frac{126 - 4/3 \cdot 98}{\sqrt{98 \cdot \frac{2}{9}}} = \frac{126 - 4/3\, 98}{\frac{1}{3}\sqrt{196}} = \frac{378 - 392}{14} = -1 \right\} =$$

$$= 1 - \mathbb{P}\{Z \leq -1\} = 1 - \Phi(-1) = \Phi(1) \boxed{\sim 0.84134}$$

Esercizio 3 Il campione statistico è costituito da 81 v.a. $X_1, \dots, X_{81}$ gaussiane con varianza ignota. L'ipotesi nulla e l'alternativa sono

$$H_0)\ \sigma^2 \leq \sigma_0^2 = 0.01 \quad , \quad H_1)\ \sigma^2 > \sigma_0^2 = 0.01$$

e quindi consideriamo il test sulla varianza di un campione gaussiano.

(i) Fissando il livello $\alpha = 0.05$, l'ipotesi è accettata se la varianza campionaria non appartiene alla regione critica

$$C = \left\{ \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{(1-\alpha, n-1)} \right\}$$

quindi l'ipotesi è accettata $\iff \frac{(n-1)\,\bar{\sigma}^2}{\sigma_0^2} \leq \chi^2_{(0.95, 80)}$

$$\iff \frac{80 \cdot (0.12)^2}{0.01} \leq 101.8795 \iff \frac{80 \cdot 144}{100} \leq 101.8795$$

ma $\frac{80 \cdot 144}{100} = 115.2$ e quindi l'ipotesi non è accettabile.

(ii) Il p-value dei dati per questo test è

$$\boxed{\bar{\alpha}} = 1 - F_{\chi^2(80)}\left(\frac{(n-1)\,\bar{\sigma}^2}{\sigma_0^2}\right) = 1 - F_{\chi^2(80)}(115.2) \sim 1 - 0.993 \boxed{= 0.007}$$

e quindi l'ipotesi è molto poco plausibile.

Affinché $\bar{\alpha} \geq 0.25$ deve essere

$$1 - F_{\chi^2(80)}\left(\frac{(n-1)\,\bar{\sigma}^2}{\sigma_0^2}\right) \geq 0.25 \iff F_{\chi^2(80)}\left(\frac{80\cdot(0.12)^2}{\sigma_0^2}\right) \leq 0.75$$

$$\iff \frac{80\cdot(0.12)^2}{\sigma_0^2} \leq \chi^2_{(0.75,80)} \sim 88.13$$

$$\iff \boxed{\sigma_0 \gtrsim} \left(\frac{80\cdot(0.12)^2}{88.13}\right)^{1/2} \sim \boxed{0.114.}$$