Lezione 22
Esempi di rendite, leasing, costituzione di capitali

Maurizio Pratelli

UN ESEMPIO DI RENDITA

Pianificare una rendita significa investire una somma di denaro per garantire un flusso futuro di denaro con certe scadenze prefissate.

Tipicamente le rendite sono periodiche, possono essere anticipate o posticipate, immediate o differite, . . .

È importante precisare che un problema di rendita è un problema di attualizzazione.

Rendite

Esercizio 1. Voglio investire oggi (01/12/22) una somma di denaro per garantire una rendita di 400 € mensili a partire dal 1/09/23 per la durata di 3 anni (per permettere a un nipote di frequentare una laurea triennale).

La rendita sarà erogata all'inizio di ogni mese, e la banca riconosce sulle somme depositate un interesse del 2,2 % annuo.

Quale somma devo investire?

Osservazione: si tratta di una rendita anticipata (il versamento è all'inizio del mese) e differita (l'inizio della rendita non è immediato ma dopo 9 mesi)

senza interessi

$400 \times 36 = 14.400$

con gli interessi

un po' di meno

Guida alla soluzione:

- conviene misurare il tempo in mesi e quindi trasformare l'interesse del 2,2 % (che è un interesse annuo con capitalizzazione composta) in interesse mensile equivalente
- si tratta di calcolare il valore attuale al 1/12/22 della somma R ($R = 400$ €) tra 9 mesi, 10 mesi . . . fino a 44 mesi.

$$(1+i_{12})^{12} = 1,022$$

$$i_{12} = 1,022^{1/12} - 1 = 0,00185$$

Rendite

$$\frac{400}{(1+i)^9} + \frac{400}{(1+i)^{10}} + \dots + \frac{400}{(1+i)^{44}}$$

$$= 400 \left(\frac{1}{1{,}00181^9} + \dots + \frac{1}{1{,}00181^{44}} \right)$$

$$q = \left(\frac{1}{1+i} \right) = \frac{1}{1{,}00181}$$

$$q^9 + \dots + q^{44} = \frac{q^{45} - q^9}{q - 1} = \frac{1{,}00181^{-45} - 1{,}00181^{-9}}{1{,}00181^{-1} - 1}$$

Rendite

[illegible]

13.728,-- –

UN ESEMPIO DI COSTITUZIONE DI CAPITALE

Questa volta si tratta di pianificare dei versamenti (con una certa scadenza temporale, anticipati o posticipati, ...) al fine di poter disporre di una certa somma a una data prefissata.

In questo caso si tratta di un problema di capitalizzazione.

Esercizio 2 Voglio poter disporre, alla data 1/01/27, della somma di 40.000 € : a tale scopo intendo effettuare un versamento all'inizio di ogni trimestre a partire dal1/01/23, sapendo che la banca riconosce sulle somme versate un interesse dello 1,9 % annuo.

Quale somma devo versare ogni volta?

Osservazione: i versamenti sono anticipati, per una durata totale di 16 trimestri.

senza interessi

$40000 : 16 = 2500$

mi aspetto

un pò meno

Guida alla soluzione:

- conviene misurare il tempo in trimestri e quindi trasformare l'interesse dello 1,9 % in interesse trimestrale equivalente
- si tratta di rivalutare una somma R (da calcolare) per 16, 15 ... fino a 1 semestre, in modo che la somma dei versamenti ricapitalizzati porti a 40.000 € .

$$(1+i_4)^4 = 1{,}019$$

$$i_4 = 1{,}019^{1/4} - 1 = \quad 0{,}00471 \text{ trimestrale}$$

R versamento da calcolare

$$R \times 1{,}00471^{16} + R \times 1{,}00471^{15} + \ldots + R \times 1{,}00471$$

$$a = 1{,}00471$$

$$R\left(a + \ldots + a^{16}\right) = 40.000$$

$$a + \ldots + a^{16} = \frac{a^{17} - a}{a - 1} = \frac{1{,}00471^{17} - 1{,}00471}{0{,}00471}$$

$$= 16{,}65$$

$$R = \frac{40000}{16,65} = 2402,40$$

"senza interessi

$$R = \frac{40000}{16} = \text{———} \quad 2500$$

con interessi

$$R = \frac{40\,000}{16,65} = 2402,40$$

UN ESEMPIO DI LEASING

Un contratto di Leasing prevede, per il possesso di un bene di un certo valore A, il pagamento di un affitto R per un certo numero di scadenze e al termine la possibilità di restituire il bene oppure di diventarne proprietario pagando un certo valore di riscatto V.

Se le rate sono n, sono posticipate e vengono pagate in un certo intervallo di tempo sul quale vale un tasso di interesse i, deve valere l'equazione

$$A = \frac{R}{(1+i)} + \frac{R}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{R}{(1+i)^n} + \frac{V}{(1+i)^n}$$

Se invece le rate sono anticipate vale una formula simile cambiando però gli esponenti di $(1+i)$, bisogna poi fare attenzione se il momento del possibile riscatto coincide con l'ultima rata o è posteriore ... in ogni caso si tratta generalmente di un problema di attualizzazione.

Esercizio 3 Per l'acquisto di una vettura del prezzo di 18.000 € il concessionario propone la seguente formula di pagamento:

- 1000 € al momento della consegna
- 48 rate mensili anticipate di 249 €
- al termine dei 4 anni di affitto si può scegliere tra restituire la vettura o riscattarla.

L'interesse medio per i finanziamenti di vetture è del 6 % annuo: qual è il giusto valore di riscatto?

Osservazione: fare attenzione al fatto che la prima rata si paga immediatamente, mentre l'eventuale riscatto avviene al termine del 48-simo mese. In questo esempio conviene misurare il tempo in mesi (e calcolare l'interesse mensile equivalente nel senso degli interessi composti).

$(1 + i_{12})^{12} = 1,06 \qquad i_{12} \approx 0,0048$

Leasing

$$18000 = 1000 + 249 + \cdots + \frac{249}{(1+i)^{47}} + \frac{V}{(1+i)^{48}}$$

$$17000 = 249\left(1 + \frac{1}{1+i} + \cdots + \left(\frac{1}{1+i}\right)^{47}\right) + \frac{V}{(1+i)^{48}}$$

$$1+i = 1{,}0048$$

$$1 + \cdots + \;=\; \frac{1{,}0048^{-48} - 1}{1{,}0048^{-1} - 1} = 42{,}98$$

$$17000 - 249 \times 42{,}98 = V \times (1+i)^{-48}$$

$$V = 1{,}0048^{48}\left(17000 - 249 \times 42{,}98\right) =$$

$$= 7325{,}43$$

Leasing

Altri esercizi

Gli esercizi che seguono, con qualche modifica, sono presi dalla prova intermedia dell'anno passato 21-22.

Esercizio 4 Sono possibili due investimenti:

a) investire oggi 10000 € ricevendone 11.600 tra due anni

b) investire la stessa somma ricevendo 6000 € tra un anno e 5000 tra due anni.

Vogliamo scegliere l'investimento più conveniente secondo il criterio del REA: esaminare per quali valori del tasso di interesse di riferimento l'investimento a) è preferibile all'investimento b).

con interesse basso conviene a)

con interesse alto conviene b)

Altri esercizi

i interesse annuo di riferimento

$REA_{a)}$ $\quad -10000 + \dfrac{11600}{(1+i)^2}$

$REA_{b)}$ $\quad -10000 + \dfrac{6000}{1+i} + \dfrac{5000}{(1+i)^2}$

$REA_A > REA_B$

$$\cancel{-10000} + \frac{11600}{(1+i)^2} > \cancel{-10000} + \frac{6000}{(1+i)} + \frac{5000}{(1+i)^2}$$

Altri esercizi

$$\frac{11600}{(1+i)^2} - \frac{5000}{(1+i)^2} > \frac{6000}{(1+i)}$$

$$\frac{6600}{(1+i)^2} > \frac{6000}{(1+i)}$$

$$(1+i) < \frac{6600}{6000} = 1{,}1$$

$i < 0{,}1$

cioè il

10%

Esercizio 5 Per il pagamento di un server del costo di 10.000 € , non disponendo immediatamente della somma necessaria, l'amministratore di una ditta valuta tre possibilità di finanziamento:

a) il fornitore offre di posticipare il pagamento di 90 giorni portandolo a 10364 €

b) una banca si offre di finanziare l'acquisto mediante il pagamento di 10 rate mensili con ammortamento a quote di capitale costanti; la prima rata, da saldare dopo un mese, è di 1100 €

c) una finanziaria offre di coprire l'acquisto con un leasing di due canoni semestrali posticipati di 4448 € ciascuno ed un valore di riscatto di 2000 € ; ci sono inoltre 100 € di commissioni al momento del versamento di ogni canone.

Per ognuno di questi finanziamenti calcolare il TIR per decidere quale sia più conveniente.

Caso a) ho un interesse trimestrale

$10000(1+i_4) = 10364$ cioè $1+i_4 = 1{,}0364$

$i_4 = 0{,}0364$ $\quad i = (1+i_4)^4 - 1 = 0{,}153$

cioè il $TIR_A = 15{,}3\%$ (interesse <u>alto</u>)

Caso b) La prima rata è

$\frac{A}{n} + iA = 1000 + i \times 10000 = 1100$

cioè l'interesse è 1% cioè mensile

Altri esercizi

in termini annuali

$$i = (1 + 0{,}01)^{12} - 1 = 0{,}1268$$

cioè il TIR_B è $12{,}68\%$

---

caso C) per trovare l'interesse semestrale i_2 bisogna risolvere l'equazione

$$10000 = \frac{4548}{(1+i_2)} + \frac{4548}{(1+i_2)^2} + \frac{2000}{(1+i_2)^2}$$

Altri esercizi

cioè posto $x = 1 + i_2$

$$10000\,x^2 - 4548\,x - 6548 = 0$$

Soluzione

$$(1+i_2) = x = \frac{4548 \pm \sqrt{4548^2 + 4 \times 10000 \times 6548}}{20000} =$$

$$= 1{,}067 \qquad i_2 = 0{,}067$$

$i = (1+i_2)^2 - 1 = 0{,}138$ cioè $TIR_c = 13{,}8\,\%$

La soluzione b) è la più conveniente

a) è la peggiore