Lezione 20
Ammortamenti

Maurizio Pratelli

Col termine di ammortamento si intende l'estinzione graduale di un debito, con un certo numero di rate che contengono una quota di interessi ed una quota di capitale.

Esempio: si contrae un prestito di 1000 € da saldare in tre rate annue col tasso del 5 % annuo. Se le prime due rate sono di 400 € , di quanto deve essere la terza rata e quali sono le quote di interessi?

Ammortamenti

Col termine di ammortamento si intende l'estinzione graduale di un debito, con un certo numero di rate che contengono una quota di interessi ed una quota di capitale.

Esempio: si contrae un prestito di 1000 € da saldare in tre rate annue col tasso del 5 % annuo. Se le prime due rate sono di 400 € , di quanto deve essere la terza rata e quali sono le quote di interessi?

- alla prima rata 50 € sono di interessi (5 % su 1000 €) e 350 € di rimborso capitale
- alla seconda rata gli interessi sono 32,5 € (interessi sulla quota di 650) e 367,5 € scalano il debito che rimane di 282,5 €
- alla terza rata si paga il debito residuo con i relativi interessi, cioè $282,5 \times 1,05 = 296,625$ € .

Introduciamo alcune notazioni:

- A è l'importo del debito, n il numero delle rate
- $R_1, \ldots, R_n$ le rate da pagare alle scadenze $t_1, \ldots, t_n$
- D_k il debito residuo al termine del k-simo periodo
- E_k il debito estinto al termine del k-simo periodo
- I_k la quota di interessi contenuta nella k-sima rata
- C_k la quota di capitale pagata nella k-sima rata

Una tavola contenente gli elementi sopra descritti è chiamata piano di ammortamento.

Nella pagina seguente è riportato il piano di ammortamento dell'esempio preliminare (mi fermo alla prima cifra decimale).

k	R_k	C_k	I_k	D_k	E_k
0				1000	0
1	400	350	50	650	350
2	400	$367,5$	$32,5$	$282,5$	$717,5$
3	$296,6$	$282,5$	$14,1$	0	1000

Notiamo alcune evidenti relazioni:

- $A = D_0 = E_k + D_k$ per ogni rata k
- $I_k = i\, D_{k-1}$
- $R_k = C_k + I_k$
- $E_k = C_1 + \cdots + C_k$

ma soprattutto la relazione più importante è la seguente:

D_k è il valore attuale (al tempo k) delle restanti $(n-k)$ rate da pagare

Osservazione: gli interessi potrebbero essere differenti nei vari periodi e questo renderebbe più complicato il *“piano di ammortamento”*, ma per il momento non ci occupiamo di questa situazione.

Ci concentriamo su due particolari tipi di ammortamento, le più usate nella pratica commerciale:

- ammortamento a rata costante (detto anche *“alla francese”*)
- ammortamento a quota costante di capitale, chiamato talvolta (per dei motivi che non mi sono chiari) *“all’italiana”*

Il primo è di gran lunga il più usato nella pratica commerciale; tuttavia cominciamo col secondo esclusivamente perché è molto più facile da trattare.

AMMORTAMENTO A QUOTA COSTANTE DI CAPITALE

Con questo metodo si stabilisce, se n sono le rate, che ogni rata contiene una *quota di capitale sempre eguale* (e quindi eguale a $\frac{A}{n}$) oltre agli interessi sul debito residuo relativo a quel periodo. Di conseguenza le rate sono via via più piccole.

Esempio: un debito di 2000 € al tasso annuo del 5 % viene estinto in 4 anni con questo metodo di ammortamento.

Intanto la quota costante di capitale è $\frac{2000}{4} = 500$ € .

Ammortamento a quota costante di capitale

- la prima rata è $500 + 0,05 \times 2000 = 600$ €
- la seconda rata (poiché il debito residuo dopo la prima rata è 1500) è eguale a $500 + 0,05 \times 1500 = 575$ euro
- con conti analoghi la terza rata è di 550 € e la quarta rata di 525 € .

Si può osservare che ogni rata diminuisce rispetto alla precedente di una quota costante, pari a $25 = 500 \times 0,05$ € .

Vediamo ora, partendo dall'esempio precedente, di scrivere formule generali per le rate e le quote d'interesse: dobbiamo estinguere in n rate un debito A , indicando con i il *"tasso d'interesse sul periodo"*.

Valgono le seguenti formule:

- $C_k = \dfrac{A}{n}$
- $E_k = \dfrac{k\,A}{n}$
- $D_k = \dfrac{(n-k)\,A}{n}$
- $I_k = i\,D_{k-1} = \dfrac{i\,(n-k+1)}{n}\,A$
- $R_k = C_k + I_k = \dfrac{1+i\,(n-k+1)}{n}\,A$

Si può notare che sia I_k che R_k diminuiscono ogni volta della quantità $\left(i\,\dfrac{A}{n}\right)$ (in linguaggio matematico di dice che *formano una progressione aritmetica di ragione* $\left(-\,i\,\dfrac{A}{n}\right)$).

AMMORTAMENTO A RATA COSTANTE

Abbiamo già incontrato diverse volte questa situazione: il debito A viene rimborsato mediante n rate di importo costante, e se i è *l'interesse sul periodo* ed R l'importo della rata, valgono le formule

$$R = \frac{A\,i}{1-(1+i)^{-n}} \qquad\qquad A = R\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right)$$

Esamineremo nella prossima lezione i rapporti tra le varie quantità, ma osserviamo subito che D_k (cioè il debito residuo dopo k rate) coincide col valore attuale di $(n-k)$ rate (tutte di importo R) e vale pertanto la formula

$$D_k = R\left(\frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{i}\right)$$

Ammortamento a rata costante

È facile scrivere R oppure A conoscendo tutti gli altri elementi, e n si può ottenere da una formula che abbiamo già visto nell' Esercizio 4 della Lezione 19: partendo dall'equazione

$$(1+i)^{-n} = \frac{R - A\,i}{R}$$

si ottiene

$$-n \log(1+i) = \log(R - A\,i) - \log(R)$$

e in definitiva si arriva alla formula

$$n = \frac{\log(R) - \log(R - A\,i)}{\log(1+i)}$$

I guai arrivano se si deve ottenere l'interesse i conoscendo A, R e n.

Infatti l'equazione

$$\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{R}{A}$$

è un' equazione di grado n che non si può immaginare di risolvere senza strumenti specifici.

Eppure il calcolo dell'interesse i è fondamentale ad esempio per poter calcolare il TAEG di un mutuo immobiliare o di un piano di pagamento per l'acquisto a rate di una vettura ...

...ma questo si può fare solo con l'ausilio di un software specializzato.

Esempio

Per l'acquisto di una vettura del costo di 20.000 € mi propongono un pagamento triennale mediante rate mensili di 640 € : qual è l'interesse sottinteso in questa offerta di finanziamento?

Osservazione: notiamo che, non essendoci costi aggiuntivi, quello che cerchiamo è equivalentemente il TIR o il TAEG; non è invece eguale al TAN poiché le rate sono mensili ed il TAN è un tasso annuo nominale (convertibile 12 volte in questo caso).