

Lezione 20

Ammortamenti

Maurizio Pratelli

Col termine di **ammortamento** si intende l'estinzione graduale di un debito, con un certo numero di rate che contengono una **quota di interessi** ed una **quota di capitale**.

Esempio: si contrae un prestito di 1000 € da saldare in tre rate annue col tasso del 5 % annuo. Se le prime due rate sono di 400 € , di quanto deve essere la terza rata e quali sono le quote di interessi?

Col termine di **ammortamento** si intende l'estinzione graduale di un debito, con un certo numero di rate che contengono una **quota di interessi** ed una **quota di capitale**.

Esempio: si contrae un prestito di 1000 € da saldare in tre rate annue col tasso del 5 % annuo. Se le prime due rate sono di 400 € , di quanto deve essere la terza rata e quali sono le quote di interessi?

- alla prima rata 50 € sono di interessi (5 % su 1000 €) e 350 € di rimborso capitale
- alla seconda rata gli interessi sono 32,5 € (interessi sulla quota di 650) e 367,5 € scalano il debito che rimane di 282,5 €
- alla terza rata si paga il debito residuo con i relativi interessi, cioè $282,5 \times 1,05 = 296,625$ € .

Introduciamo alcune notazioni:

- A è l'importo del debito, n il numero delle rate
- R_1, \dots, R_n le rate da pagare alle scadenze t_1, \dots, t_n
- D_k il **debito residuo** al termine del k -simo periodo
- E_k il **debito estinto** al termine del k -simo periodo
- I_k la **quota di interessi** contenuta nella k -sima rata
- C_k la **quota di capitale** pagata nella k -sima rata

Una tavola contenente gli elementi sopra descritti è chiamata **piano di ammortamento**.

Nella pagina seguente è riportato il piano di ammortamento dell'esempio preliminare (mi fermo alla prima cifra decimale).

k	R_k	C_k	I_k	D_k	E_k
0				1000	0
1	400	350	50	650	350
2	400	367,5	32,5	282,5	717,5
3	296,6	282,5	14,1	0	1000

Notiamo alcune evidenti relazioni:

- $A = D_0 = E_k + D_k$ per ogni rata k
- $I_k = i D_{k-1}$
- $R_k = C_k + I_k$.
- $E_k = C_1 + \dots + C_k$

ma soprattutto la relazione più importante è la seguente:

D_k è il **valore attuale** (al tempo k) **delle restanti** $(n-k)$ **rate da pagare**

Osservazione: gli interessi potrebbero essere differenti nei vari periodi e questo renderebbe più complicato il “*piano di ammortamento*”, ma per il momento non ci occupiamo di questa situazione.

Ci concentriamo su due particolari tipi di ammortamento, le più usate nella pratica commerciale:

- ammortamento **a rata costante** (detto anche “*alla francese*”)
- ammortamento **a quota costante di capitale**, chiamato talvolta (per dei motivi che non mi sono chiari) “*all’italiana*”

Il primo è di gran lunga il più usato nella pratica commerciale; tuttavia cominciamo col secondo esclusivamente perché è molto più facile da trattare.

AMMORTAMENTO A QUOTA COSTANTE DI CAPITALE

Con questo metodo si stabilisce, se n sono le rate, che ogni rata contiene una *quota di capitale sempre eguale* (e quindi eguale a $\frac{A}{n}$) oltre agli interessi sul debito residuo relativo a quel periodo. Di conseguenza le rate sono via via più piccole.

Esempio: un debito di 2000 € al tasso annuo del 5 % viene estinto in 4 anni con questo metodo di ammortamento.

Intanto la quota costante di capitale è $\frac{2000}{4} = 500$ € .

Ammortamento a quota costante di capitale

- la prima rata è $500 + 0,05 \times 2000 = 600$ €
- la seconda rata (poiché il debito residuo dopo la prima rata è 1500) è eguale a $500 + 0,05 \times 1500 = 575$ euro
- con conti analoghi la terza rata è di 550 € e la quarta rata di 525 € .

Si può osservare che ogni rata **diminuisce rispetto alla precedente di una quota costante**, pari a $25 = 500 \times 0,05$ € .

Vediamo ora, partendo dall'esempio precedente, di scrivere formule generali per le rate e le quote d'interesse: dobbiamo estinguere in n rate un debito A , indicando con i il "tasso d'interesse sul periodo".

$$500 = \frac{2000}{4} = \frac{A}{4} \quad \left(\frac{A}{n} \right)$$
$$0,05 = i$$

Valgono le seguenti formule:

$$\blacksquare C_k = \frac{A}{n}$$

$$\blacksquare E_k = \frac{kA}{n}$$

$$\blacksquare D_k = \frac{(n-k)A}{n}$$

$$\blacksquare I_k = i D_{k-1} = \frac{i(n-k+1)}{n} A$$

$$\blacksquare R_k = C_k + I_k = \frac{1+i(n-k+1)}{n} A$$

restano da
pagare $(n-k)$
rate

Si può notare che sia I_k che R_k **diminuiscono ogni volta della quantità** $(i \frac{A}{n})$
(in linguaggio matematico si dice che *formano una progressione aritmetica di ragione* $(-i \frac{A}{n})$).

AMMORTAMENTO A RATA COSTANTE

Abbiamo già incontrato diverse volte questa situazione: il debito A viene rimborsato mediante n rate di importo costante, e se i è l'interesse sul periodo ed R l'importo della rata, valgono le formule

$$R = \frac{A i}{1 - (1 + i)^{-n}} \quad A = R \left(\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right)$$

Esamineremo nella prossima lezione i rapporti tra le varie quantità, ma osserviamo subito che D_k (cioè il debito residuo dopo k rate) coincide col valore attuale di $(n-k)$ rate (tutte di importo R) e vale pertanto la formula

$$D_k = R \left(\frac{1 - (1 + i)^{-(n-k)}}{i} \right)$$

$$\begin{aligned} &= (n-k) = \\ &= -n + k \end{aligned}$$

È facile scrivere R oppure A conoscendo tutti gli altri elementi, e n si può ottenere da una formula che abbiamo già visto nell' Esercizio 4 della Lezione 19: partendo dall'equazione

$$(1+i)^{-n} = \frac{R - Ai}{R}$$

$$\Downarrow (1+i)^{-n} = \frac{R - Ai}{R}$$

si ottiene

$$-n \log(1+i) = \log(R - Ai) - \log(R)$$

e in definitiva si arriva alla formula

$$n = \frac{\log(R) - \log(R - Ai)}{\log(1+i)}$$

I guai arrivano se si deve ottenere l'interesse i conoscendo A , R e n .

Infatti l'equazione

$$\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} = \frac{R}{A}$$

è un' equazione di grado n che non si può immaginare di risolvere senza strumenti specifici.

Eppure il calcolo dell'interesse i è fondamentale ad esempio **per poter calcolare il TAEG di un mutuo immobiliare o di un piano di pagamento per l'acquisto a rate di una vettura ...**

... ma questo si può fare solo con l'ausilio di un software specializzato.

Esempio

Per l'acquisto di una vettura del costo di 20.000 € mi propongono un pagamento triennale mediante rate mensili di 640 € : qual è l'interesse sottinteso in questa offerta di finanziamento?

Osservazione: notiamo che, non essendoci costi aggiuntivi, quello che cerchiamo è equivalentemente il TIR o il TAEG; non è invece eguale al TAN poiché le rate sono mensili ed il TAN è un tasso annuo nominale (convertibile 12 volte in questo caso).

$$20.000 = 640 \left(\frac{1 - (1+ri)^{-36}}{ri} \right)$$

Trovo il tasso nel mese \rightarrow tasso annuo

"Pententativi" vanno
annuali e trovare
un tasso annuo 9,43%

TAN 9,43%

TIR = TAEG

$$\left(1 + \frac{0,0943}{12} \right)^{12} - 1$$

9,84%
annuo

