Metodi Matematici e Statistici per Giuristi

I parte - Lezione 02: Elementi di logica

Maurizio Pratelli

20/09/2022

Section 1

Calcolo delle proposizioni

Proposizioni

- Una **proposizione** è una affermazione a cui si può attribuire uno dei due *valori di verità*:

Proposizioni

- Una **proposizione** è una affermazione a cui si può attribuire uno dei due *valori di verità*:
  - **Vero** (in inglese *true*, indicato anche con le lettere V, T oppure il numero 1)

Proposizioni

- Una **proposizione** è una affermazione a cui si può attribuire uno dei due *valori di verità*:
    - **Vero** (in inglese *true*, indicato anche con le lettere V, T oppure il numero 1)
    - **Falso** (*false*, indicato anche con la lettera F oppure il numero 0)

Proposizioni

- Una **proposizione** è una affermazione a cui si può attribuire uno dei due *valori di verità*:
    - **Vero** (in inglese *true*, indicato anche con le lettere V, T oppure il numero 1)
    - **Falso** (*false*, indicato anche con la lettera F oppure il numero 0)
- Gli esempi matematici sono i più semplici, perché la verità matematica è priva di ambiguità:

Proposizioni

- Una **proposizione** è una affermazione a cui si può attribuire uno dei due *valori di verità*:
  - **Vero** (in inglese *true*, indicato anche con le lettere V, T oppure il numero 1)
  - **Falso** (*false*, indicato anche con la lettera F oppure il numero 0)
- Gli esempi matematici sono i più semplici, perché la verità matematica è priva di ambiguità:
  - "i triangoli hanno 4 lati"

Proposizioni

- Una **proposizione** è una affermazione a cui si può attribuire uno dei due *valori di verità*:
  - **Vero** (in inglese *true*, indicato anche con le lettere V, T oppure il numero 1)
  - **Falso** (*false*, indicato anche con la lettera F oppure il numero 0)
- Gli esempi matematici sono i più semplici, perché la verità matematica è priva di ambiguità:
  - "i triangoli hanno 4 lati"
  - "due più due fa 4"

- In questo corso interessano però soprattutto esempi dal mondo reale, in cui l'importante è che, almeno idealmente, un valore di verità si possa attribuire: sono proposizioni

- In questo corso interessano però soprattutto esempi dal mondo reale, in cui l'importante è che, almeno idealmente, un valore di verità si possa attribuire: sono proposizioni
  - "Tutti gli italiani pagano le tasse"

- In questo corso interessano però soprattutto esempi dal mondo reale, in cui l'importante è che, almeno idealmente, un valore di verità si possa attribuire: sono proposizioni
  - "Tutti gli italiani pagano le tasse"
  - "Se l'imputato è dichiarato colpevole, finirà in carcere"

- In questo corso interessano però soprattutto esempi dal mondo reale, in cui l'importante è che, almeno idealmente, un valore di verità si possa attribuire: sono proposizioni
  - "Tutti gli italiani pagano le tasse"
  - "Se l'imputato è dichiarato colpevole, finirà in carcere"
- Una domanda, ad esempio

"Gli italiani preferiscono la pizza al sushi?"

non è una proposizione (anche se la risposta è *vero* oppure *falso*). Tuttavia basta riformularla in modo che lo diventi (proviamo per esercizio in questo caso).

- In questo corso interessano però soprattutto esempi dal mondo reale, in cui l'importante è che, almeno idealmente, un valore di verità si possa attribuire: sono proposizioni
  - "Tutti gli italiani pagano le tasse"
  - "Se l'imputato è dichiarato colpevole, finirà in carcere"
- Una domanda, ad esempio

  "Gli italiani preferiscono la pizza al sushi?"

  non è una proposizione (anche se la risposta è *vero* oppure *falso*). Tuttavia basta riformularla in modo che lo diventi (proviamo per esercizio in questo caso).
- Come **notazione** generale per le proposizioni usiamo lettere maiuscole latine (A, B, C, ecc.). Ad esempio: $A =$ "due più due fa quattro".

Negazione

- Il calcolo logico considera **operazioni** tra proposizioni e in particolare indica come il valore di verità si trasformi di conseguenza.

Negazione

- Il calcolo logico considera **operazioni** tra proposizioni e in particolare indica come il valore di verità si trasformi di conseguenza.
- L'operazione più semplice è la **negazione** di una proposizione A,

"non A"

indicata simbolicamente anche come NOT A, $\bar{A}$, $\neg A$.

Negazione

- Il calcolo logico considera **operazioni** tra proposizioni e in particolare indica come il valore di verità si trasformi di conseguenza.
- L'operazione più semplice è la **negazione** di una proposizione A,

  "non A"

  indicata simbolicamente anche come NOT A, $\bar{A}$, $\neg A$.
- Esempi:

Negazione

- Il calcolo logico considera **operazioni** tra proposizioni e in particolare indica come il valore di verità si trasformi di conseguenza.
- L'operazione più semplice è la **negazione** di una proposizione A,

  "non A"

  indicata simbolicamente anche come NOT A, $\bar{A}$, $\neg A$.
- Esempi:
  - $A =$ "due più due fa quattro"

Negazione

- Il calcolo logico considera **operazioni** tra proposizioni e in particolare indica come il valore di verità si trasformi di conseguenza.
- L'operazione più semplice è la **negazione** di una proposizione A,

  "non A"

  indicata simbolicamente anche come NOT A, $\bar{A}$, $\neg A$.
- Esempi:
  - $A =$ "due più due fa quattro"
  - "non A" $=$ "due più due *non* fa quattro"

Negazione

- Il calcolo logico considera **operazioni** tra proposizioni e in particolare indica come il valore di verità si trasformi di conseguenza.
- L'operazione più semplice è la **negazione** di una proposizione A,

  "non A"

  indicata simbolicamente anche come NOT A, $\bar{A}$, $\neg A$.
- Esempi:
  - $A =$ "due più due fa quattro"
  - "non A" $=$ "due più due *non* fa quattro"
  - B "tutti gli italiani pagano le tasse"

Negazione

- Il calcolo logico considera **operazioni** tra proposizioni e in particolare indica come il valore di verità si trasformi di conseguenza.
- L'operazione più semplice è la **negazione** di una proposizione A,

  "non A"

  indicata simbolicamente anche come NOT A, $\bar{A}$, $\neg A$.
- Esempi:
  - $A =$ "due più due fa quattro"
  - "non A" $=$ "due più due *non* fa quattro"
  - B "tutti gli italiani pagano le tasse"
  - "non B" $=$ "*non* tutti gli italiani pagano le tasse", o equivalentemente "*almeno un italiano non paga le tasse*".

Il valore di verità di “non A” è l’opposto di quello di A, come si può riassumere in una **tavola di verità**

A	non A
V	F
F	V

Vedremo tavole di verità anche per le altre operazioni, leggermente più complesse.

Esercizio: scrivere la negazione delle seguenti proposizioni

"Giuseppe ha figli"

"Domani piove"

"Nessuno è immortale"

"Almeno un pedone attraversa sulle strisce"

Congiunzione

- Date due proposizioni A, B, la loro congiunzione

  "A e B"

  che si può scrivere anche $A \wedge B$ o anche $A \, \text{AND} \, B$ è una proposizione che è **vera** solo nel caso in cui A, B siano **entrambe vere**.

Congiunzione

- Date due proposizioni A, B, la loro congiunzione

$$\text{"}A \text{ e } B\text{"}$$

che si può scrivere anche $A \wedge B$ o anche $A \,\mathrm{AND}\, B$ è una proposizione che è **vera** solo nel caso in cui A, B siano **entrambe vere**.

- Consideriamo ad esempio:

Congiunzione

- Date due proposizioni A, B, la loro congiunzione

  "A e B"

  che si può scrivere anche $A \wedge B$ o anche $A \,\mathrm{AND}\, B$ è una proposizione che è **vera** solo nel caso in cui A, B siano **entrambe vere**.
- Consideriamo ad esempio:
  - $A =$ "2 è un numero pari" (vera)

Congiunzione

- Date due proposizioni A, B, la loro congiunzione

  "A e B"

  che si può scrivere anche $A \wedge B$ o anche $A \,\text{AND}\, B$ è una proposizione che è **vera** solo nel caso in cui A, B siano **entrambe vere**.

- Consideriamo ad esempio:
  - $A =$ "2 è un numero pari" (vera)
  - $B =$ "2 è un numero maggiore di 1" (vera)

Congiunzione

- Date due proposizioni A, B, la loro congiunzione

  "A e B"

  che si può scrivere anche $A \wedge B$ o anche $A \,\text{AND}\, B$ è una proposizione che è **vera** solo nel caso in cui A, B siano **entrambe vere**.

- Consideriamo ad esempio:
  - $A =$ "2 è un numero pari" (vera)
  - $B =$ "2 è un numero maggiore di 1" (vera)
  - $C =$ "2 è un numero negativo" (falsa)

Congiunzione

- Date due proposizioni A, B, la loro congiunzione

  "A e B"

  che si può scrivere anche $A \wedge B$ o anche $A \,\mathrm{AND}\, B$ è una proposizione che è **vera** solo nel caso in cui A, B siano **entrambe vere**.

- Consideriamo ad esempio:
  - $A =$ "2 è un numero pari" (vera)
  - $B =$ "2 è un numero maggiore di 1" (vera)
  - $C =$ "2 è un numero negativo" (falsa)
  - allora "A e B" è vera, mentre "A e C" è falsa.

La tavola di verità per l'operazione di congiunzione è la seguente (bisogna considerare tutti i 4 possibili casi per i valori di verità di A, B)

A	B	A e B
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Esercizio: date le proposizioni

$$A = \text{"Roma è la capitale d'Italia"}$$

$$B = \text{"Roma si trova nel Lazio"}$$

enunciare la proposizione "A e B" e determinarne il valore di verità.

Esercizio: data una qualsiasi proposizione A, determinare il valore di verità della proposizione "A e non A".

Disgiunzione (inclusiva)

- Date due proposizioni A, B, la loro disgiunzione (detta a volte anche inclusiva)

  "A oppure B"

  che si può scrivere anche $A \vee B$ o anche $A \,\mathrm{OR}\, B$ è una proposizione che è **falsa** solo nel caso in cui A, B siano **entrambe false** (in tutti gli altri casi è vera).

– Alternativamente, "A oppure B" è **vera** nel caso in cui **almeno una** tra A, B sia vera.

Disgiunzione (inclusiva)

- Date due proposizioni A, B, la loro disgiunzione (detta a volte anche inclusiva)

  "A oppure B"

  che si può scrivere anche $A \vee B$ o anche $A \,\mathrm{OR}\, B$ è una proposizione che è **falsa** solo nel caso in cui A, B siano **entrambe false** (in tutti gli altri casi è vera).

– Alternativamente, "A oppure B" è **vera** nel caso in cui **almeno una** tra A, B sia vera.

- Consideriamo lo stesso esempio della congiunzione:

Disgiunzione (inclusiva)

- Date due proposizioni A, B, la loro disgiunzione (detta a volte anche inclusiva)

  "A oppure B"

  che si può scrivere anche $A \vee B$ o anche $A \, \mathrm{OR} \, B$ è una proposizione che è **falsa** solo nel caso in cui A, B siano **entrambe false** (in tutti gli altri casi è vera).

– Alternativamente, "A oppure B" è **vera** nel caso in cui **almeno una** tra A, B sia vera.

- Consideriamo lo stesso esempio della congiunzione:
  - $A =$ "2 è un numero pari" (vera)

Disgiunzione (inclusiva)

- Date due proposizioni A, B, la loro disgiunzione (detta a volte anche inclusiva)

  "A oppure B"

  che si può scrivere anche $A \vee B$ o anche $A \,\mathrm{OR}\, B$ è una proposizione che è **falsa** solo nel caso in cui A, B siano **entrambe false** (in tutti gli altri casi è vera).

– Alternativamente, "A oppure B" è **vera** nel caso in cui **almeno una** tra A, B sia vera.

- Consideriamo lo stesso esempio della congiunzione:
  - $A =$ "2 è un numero pari" (vera)
  - $B =$ "2 è un numero maggiore di 1" (vera)

Disgiunzione (inclusiva)

- Date due proposizioni A, B, la loro disgiunzione (detta a volte anche inclusiva)

  "A oppure B"

  che si può scrivere anche $A \vee B$ o anche $A \, \mathrm{OR} \, B$ è una proposizione che è **falsa** solo nel caso in cui A, B siano **entrambe false** (in tutti gli altri casi è vera).

– Alternativamente, "A oppure B" è **vera** nel caso in cui **almeno una** tra A, B sia vera.

- Consideriamo lo stesso esempio della congiunzione:
  - $A =$ "2 è un numero pari" (vera)
  - $B =$ "2 è un numero maggiore di 1" (vera)
  - $C =$ "2 è un numero negativo" (falsa)

Disgiunzione (inclusiva)

- Date due proposizioni A, B, la loro disgiunzione (detta a volte anche inclusiva)

  "A oppure B"

  che si può scrivere anche $A \vee B$ o anche $A\,\mathrm{OR}\,B$ è una proposizione che è **falsa** solo nel caso in cui A, B siano **entrambe false** (in tutti gli altri casi è vera).

– Alternativamente, "A oppure B" è **vera** nel caso in cui **almeno una** tra A, B sia vera.

- Consideriamo lo stesso esempio della congiunzione:
  - $A =$ "2 è un numero pari" (vera)
  - $B =$ "2 è un numero maggiore di 1" (vera)
  - $C =$ "2 è un numero negativo" (falsa)
  - allora "A oppure B" è vera ma pure "A oppure C" è vera.

Disgiunzione (inclusiva)

- Date due proposizioni A, B, la loro disgiunzione (detta a volte anche inclusiva)

  "A oppure B"

  che si può scrivere anche $A \vee B$ o anche $A \,\mathrm{OR}\, B$ è una proposizione che è **falsa** solo nel caso in cui A, B siano **entrambe false** (in tutti gli altri casi è vera).

– Alternativamente, "A oppure B" è **vera** nel caso in cui **almeno una** tra A, B sia vera.

- Consideriamo lo stesso esempio della congiunzione:
  - $A =$ "2 è un numero pari" (vera)
  - $B =$ "2 è un numero maggiore di 1" (vera)
  - $C =$ "2 è un numero negativo" (falsa)
  - allora "A oppure B" è vera ma pure "A oppure C" è vera.
  - è falsa invece la proposizione "(non A) oppure C", ossia "2 è un numero dispari oppure negativo".

La tavola di verità per l'operazione di disgiunzione è la seguente:

A	B	A oppure B
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Esercizio: date le proposizioni

$$A = \text{"Roma è la capitale d'Italia"}$$

$$B = \text{"Firenze è la capitale d'Italia"}$$

enunciare la proposizione "A oppure B" e determinarne il valore di verità.

Esercizio: data una qualsiasi proposizione A, determinare il valore di verità della proposizione "A oppure non A".

Esercizio: Scrivere le tavole di verità delle due operazioni "non (A oppure B)" e "(non A) e (non B)" e confrontarle (legge di *De Morgan*).

Implicazione materiale

- Introduciamo un'operazione fondamentale che a volte causa qualche difficoltà nella comprensione della definizione.

Implicazione materiale

- Introduciamo un'operazione fondamentale che a volte causa qualche difficoltà nella comprensione della definizione.
- Date due proposizioni A, B, l'implicazione materiale

  "A quindi B"

  (o anche "se A allora B", $A \to B$) è una proposizione **falsa** solo nel caso in cui A sia **vera** e B sia **falsa** (in tutti gli altri casi è vera).

Implicazione materiale

- Introduciamo un'operazione fondamentale che a volte causa qualche difficoltà nella comprensione della definizione.
- Date due proposizioni A, B, l'implicazione materiale

  "A quindi B"

  (o anche "se A allora B", $A \to B$) è una proposizione **falsa** solo nel caso in cui A sia **vera** e B sia **falsa** (in tutti gli altri casi è vera).
- A è detta *antecedente* e B è detta *conseguente* nell'implicazione $A \to B$.

Implicazione materiale

- Introduciamo un'operazione fondamentale che a volte causa qualche difficoltà nella comprensione della definizione.
- Date due proposizioni A, B, l'implicazione materiale

  "A quindi B"

  (o anche "se A allora B", $A \to B$) è una proposizione **falsa** solo nel caso in cui A sia **vera** e B sia **falsa** (in tutti gli altri casi è vera).
- A è detta *antecedente* e B è detta *conseguente* nell'implicazione $A \to B$.
- Esempi (matematici):

Implicazione materiale

- Introduciamo un'operazione fondamentale che a volte causa qualche difficoltà nella comprensione della definizione.
- Date due proposizioni A, B, l'implicazione materiale

  "A quindi B"

  (o anche "se A allora B", $A \to B$) è una proposizione **falsa** solo nel caso in cui A sia **vera** e B sia **falsa** (in tutti gli altri casi è vera).
- A è detta *antecedente* e B è detta *conseguente* nell'implicazione $A \to B$.
- Esempi (matematici):
  - "se 2 è un numero pari, allora 2 è un numero maggiore di 1" è vera

Implicazione materiale

- Introduciamo un'operazione fondamentale che a volte causa qualche difficoltà nella comprensione della definizione.
- Date due proposizioni A, B, l'implicazione materiale

  "A quindi B"

  (o anche "se A allora B", $A \to B$) è una proposizione **falsa** solo nel caso in cui A sia **vera** e B sia **falsa** (in tutti gli altri casi è vera).
- A è detta *antecedente* e B è detta *conseguente* nell'implicazione $A \to B$.
- Esempi (matematici):
  - "se 2 è un numero pari, allora 2 è un numero maggiore di 1" è vera
  - "se 2 è un numero pari, allora 2 è un numero negativo" è falsa

La tavola di verità per l'operazione di implicazione materiale è la seguente:

A	B	A quindi B
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Un esempio che chiarifica la definizione è la proposizione

"se piove, allora Luca prende l'ombrello"

Questa è vera se "ogni volta che piove, Luca prende l'ombrello", quindi solamente nelle occasioni di pioggia (ossia l'antecedente è vera) si deve controllare che Luca abbia preso l'ombrello (ossia che la conseguente sia vera). Per argomentare che sia **falsa** invece basta trovare una occasione in cui piove e Luca non abbia l'ombrello (quello che si dice un *controesempio*).

D'altra parte è *ben noto* che da premesse false si può argomentare di tutto, quindi non dovrebbe stupire che se l'antecedente è falsa, il valore di verità dell'implicazione è sempre vero e non dipende dalla conseguente.

Esercizio: Stabilire il valore di verità delle seguenti proposizioni:

"Se Dante ha scritto *La Divina Commedia* allora Dante è nato a Napoli."

"se 5 è un numero dispari allora 5 è un numero pari".

Esercizio: Confrontare la tavola di verità di $A \to B$ con quella di "(non A) oppure B".

Esercizio: Confrontare la tavola di verità di $A \to B$ con quelle di "(non A) quindi (non B)", "$B \to A$", "(non B) $\to$ (non A)". In quali casi coincidono?

Altre operazioni

- Una variante della disgiunzione inclusiva è la versione **esclusiva**

"o A o B"

(si scrive anche "$A\,\mathrm{XOR}\,B$) che è *vera* solo nel caso in cui **esattamente** una tra A, B è vera.

Esercizio: Scrivere le tavole di verità delle due operazioni sopra.

Altre operazioni

- Una variante della disgiunzione inclusiva è la versione **esclusiva**

  "o A o B"

  (si scrive anche "A XOR B) che è *vera* solo nel caso in cui **esattamente** una tra A, B è vera.

- La doppia implicazione

  "A se e solo se B"

  (si scrive anche $A \leftrightarrow B$) è *vera* solo nel caso in cui A, B siano entrambe vere oppure entrambe false.

Esercizio: Scrivere le tavole di verità delle due operazioni sopra.

Section 2

Regole di inferenza

Il metodo deduttivo: dalle ipotesi alle tesi

La **deduzione** logica è il metodo con cui partendo da alcune proposizioni che si ritengono vere (dette **ipotesi**) e seguendo determinati passaggi si argomenta (si deduce o si *dimostra*) la verità di altre proposizioni (dette *tesi*).

- Nei ragionamenti matematici, si identificano spesso delle *ipotesi fondamentali* dette **assiomi**.

Il metodo deduttivo: dalle ipotesi alle tesi

La **deduzione** logica è il metodo con cui partendo da alcune proposizioni che si ritengono vere (dette **ipotesi**) e seguendo determinati passaggi si argomenta (si deduce o si *dimostra*) la verità di altre proposizioni (dette *tesi*).

- Nei ragionamenti matematici, si identificano spesso delle *ipotesi fondamentali* dette **assiomi**.
- Una collezione di *ipotesi* e una *tesi* (con relativa dimostrazione) è detto **teorema** in matematica.

Modus ponens (dimostrazione diretta)

Vediamo ora tre regole fondamentali per la deduzione. La prima regola afferma che

- se una proposizione A è vera e l'implicazione materiale $A \rightarrow B$ è pure vera, allora anche la proposizione conseguente B è vera.

Modus ponens (dimostrazione diretta)

Vediamo ora tre regole fondamentali per la deduzione. La prima regola afferma che

- se una proposizione A è vera e l'implicazione materiale $A \to B$ è pure vera, allora anche la proposizione conseguente B è vera.
- **Esempio**: supponiamo di sapere che "Oggi piove" (A) e che "Se piove, Luca prende l'ombrello" ($A \to B$) sono entrambe vere. Ne segue che "Luca prende l'ombrello" è pure vera.

Modus ponens (dimostrazione diretta)

Vediamo ora tre regole fondamentali per la deduzione. La prima regola afferma che

- se una proposizione A è vera e l'implicazione materiale $A \to B$ è pure vera, allora anche la proposizione conseguente B è vera.
- **Esempio**: supponiamo di sapere che "Oggi piove" (A) e che "Se piove, Luca prende l'ombrello" ($A \to B$) sono entrambe vere. Ne segue che "Luca prende l'ombrello" è pure vera.
- Questo è il modo di procedere più naturale nelle argomentazioni: in un certo senso si passa dal generale (l'affermazione $A \to B$ è di solito un principio vero sempre) al particolare (la validità di B nella situazione specifica).

Modus tollens (dimostrazione per assurdo)

La seconda regola si basa sull'osservazione che $A \to B$ e la *contronominale* "(non B) $\to$ (non A)" hanno la stessa tavola di verità. Pertanto, rovesciando i ruoli di antecedente e conseguente (e passando alle negazioni), si introduce la seguente regola:

- se l'implicazione $A \to B$ è vera e B è falsa, allora anche A è falsa.

– Su questa regola si fonda il *ragionamento per assurdo*, in cui per mostrare la validità di una tesi B a partire dalle ipotesi A (che si ritengono vere), si suppone B falsa e si procede con l'obiettivo di dedurre che A sia falsa. Se si riesce appunto ad ottenere tale **assurdo** (perché l'ipotesi A non può essere sia vera che falsa), ne segue che B *deve* quindi essere vera.

– Benché accettato in matematica, un argomento *per assurdo* può essere visto con sospetto perché non si "costruisce" un percorso diretto tra l'ipotesi e la tesi.

Sillogismo

La terza regola è il sillogismo aristotelico, che permette di creare nuove implicazioni a partire da implicazioni vere per ipotesi:

- se le implicazioni materiali $A \to B$ e $B \to C$ sono entrambe vere, allora anche $A \to C$ è vera.

Esercizio: Dalle premesse "Se Luca è toscano allora Luca è italiano", "Se Luca è italiano allora Luca è europeo", segue che "Se Luca non è toscano, allora non è europeo"?

Sillogismo

La terza regola è il sillogismo aristotelico, che permette di creare nuove implicazioni a partire da implicazioni vere per ipotesi:

- se le implicazioni materiali $A \to B$ e $B \to C$ sono entrambe vere, allora anche $A \to C$ è vera.
- **Esempio**: partendo dalle premesse (vere) "Se studio passerò l'esame" e "Se passerò l'esame mi potrò laureare", ne segue che anche "Se studio mi potrò laureare".

Esercizio: Dalle premesse "Se Luca è toscano allora Luca è italiano", "Se Luca è italiano allora Luca è europeo", segue che "Se Luca non è toscano, allora non è europeo"?