

Lezione 18
Criteri di scelta tra operazioni finanziarie:
il REA ed il TIR

Maurizio Pratelli

Una operazione finanziaria può essere un **investimento** oppure un **finanziamento**.

Nel primo caso il primo flusso è negativo e gli altri positivi (investo una certa somma oggi per ottenere dei flussi positivi in tempi futuri), e nel secondo caso tutto è cambiato di segno.

Ad esempio se usiamo una notazione come questa

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -6000 & 5000 & 1260 \end{pmatrix}$$

intendiamo che oggi investiamo 6000 € e riceveremo 5000 € alla data 1 e 1260 € alla data 2 (potrebbero essere ad esempio un anno e due anni): si tratta cioè di una operazione di **investimento**.

L'esercizio 4 della Lezione 17 proponeva invece una operazione di **finanziamento** che può essere rappresentata dallo schema seguente

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3000 & -1600 & -1600 \end{pmatrix}$$

Questa volta però le date di versamento erano 6 mesi ed un anno.

Di fronte a diverse possibili operazioni finanziarie, si pone il problema di fornire dei **criteri di valutazione** per decidere quale possa essere più conveniente.

Il criterio del REA Rendimento Economico Attualizzato

Per definizione è il **valore attuale** dei flussi di cassa calcolato rispetto a un tasso di valutazione prefissato.

$$i = 0,04$$

$$- 6000 + \frac{5000}{(1+i)} + \frac{1260}{(1+i)^2}$$

$$3000 - \frac{1600}{(1+i)^{1/2}} - \frac{1600}{(1+i)}$$

Il criterio del REA Rendimento Economico Attualizzato

Per definizione è il **valore attuale dei flussi di cassa calcolato rispetto a un tasso di valutazione prefissato.**

Ad esempio il REA dell'operazione finanziaria A, calcolato rispetto al tasso del 4 % , è

$$-6000 + \frac{5000}{1,04} + \frac{1260}{1,04^2} = -27,366$$

mentre il REA dell'operazione B, rispetto allo stesso tasso, è

$$+3000 - \frac{1600}{(1,04)^{1/2}} - \frac{1600}{1,04} = -107,39$$

Quando due operazioni finanziarie sono **confrontabili**, è preferibile quella che ha un REA più alto (questo vale **sia per l'investimento che per il finanziamento**).

Esercizio 1. Consideriamo i due seguenti investimenti

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -10200 & 4000 & 7000 \end{pmatrix}$$

*in totale
circa 11.000*

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -10200 & 4500 & 6480 \end{pmatrix}$$

10.980

Calcolare il REA di entrambi i progetti con tasso di valutazione 3 % e decidere quale è preferibile.

Ripetere la stessa operazione con tasso 5 % .

$$\rightarrow -10.200 + \frac{4000}{1,03} + \frac{7000}{(1,03)^2}$$

Al tasso di riferimento del 3 % si hanno i seguenti risultati:

$$REA_A = 281,66 \quad REA_B = 276,95$$

Invece al tasso del 5 % i risultati sono questi:

$$REA_A = -41,269 \quad REA_B = -36,734$$

Che cosa ci dicono questi risultati?

al tasso del 3% le operazioni sono "sautoefficaci" (rendono più del 3%)
al 5% non sono sautoefficaci

L' **aspetto positivo** del REA è essenzialmente la *“facilità di calcolo”*.

Notiamo ad esempio che non c'è nessuna difficoltà nel calcolare il REA di operazioni finanziarie più a lungo termine, ad esempio un finanziamento con un numero maggiore di rate di pagamento, come il seguente:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10000 & -2000 & -2100 & -2200 & -2300 & -2400 \end{pmatrix}$$

$$10000 - \frac{2000}{(1+i)} - \frac{2100}{(1+i)^2} - \frac{2400}{(1+i)^5}$$

Gli **aspetti negativi** del REA sono invece i seguenti:

- il calcolo del REA dipende dal tasso di riferimenti scelto, c'è dunque un elemento soggettivo in questo calcolo e può dare risultati diversi con tassi diversi;
- per lunghi periodi il tasso di riferimento è poco affidabile, in quanto è imprevedibile quali possano essere i tassi di qui a qualche anno.

Per questi motivi il metodo del TIR, che adesso esponiamo, è di gran lunga preferibile dal punto di vista metodologico . . . ma ha i suoi svantaggi.

Il criterio del TIR Tasso Interno di Rendimento

Per definizione è il **tasso di valutazione in corrispondenza del quale il valore attuale dei flussi di cassa è nullo.**

Ad esempio considerando il primo esempio, il calcolo del TIR equivale a trovare l'interesse i che risolve l'equazione

$$-6000 + \frac{5000}{(1+i)} + \frac{1260}{(1+i)^2} = 0$$

*equazione
al II grado
nell' i .*

$$6000 = \frac{5000}{(1+i)} + \frac{1260}{(1+i)^2}$$

Osserviamo che noi **abbiamo già svolto un esempio di calcolo del TIR** (pur senza nominarlo) quando abbiamo affrontato l'esercizio 4 della Lezione 17, ed abbiamo risolto l'equazione

$$4000 = -1000 + \frac{1600}{(1+i_2)} + \frac{1600}{(1+i_2)^2}$$

che equivale a

$$3000 - \frac{1600}{(1+i_2)} - \frac{1600}{(1+i_2)^2} = 0$$

$$(1+i_2)^2 = (1+i)^2$$

Notiamo che in questo esempio, così come nell'esempio precedente, c'erano **due tempi futuri** e ponendo $x = (1+i)$ (o $x = (1+i_2)$) abbiamo dovuto **risolvere una equazione di secondo grado** nella variabile x .

Guardiamo le proprietà del TIR:

- l' **aspetto positivo** è la bontà del metodo, sicuramente preferibile al REA dal punto di vista metodologico;
- l' **aspetto negativo** è costituito dalla complicazione dei calcoli.

Nei due esempi precedenti c'erano solo due tempi futuri, e ci siamo trovati di fronte una **equazione di secondo grado**; ma se i tempi fossero stati tre l'equazione sarebbe diventata di **terzo grado** e così via ...

Però le vere applicazioni finanziarie richiedono spesso un numero abbastanza elevato di tempi di riscossione (investimento) o pagamento (finanziamento) ... ne segue che nelle applicazioni pratiche il TIR può essere calcolato solo con l'uso di un opportuno software specializzato.

Siano A e B due operazioni finanziarie comparabili, e indichiamo con i_A e i_B i relativi TIR.

- se A e B sono **investimenti**, A è preferibile a B se $i_A > i_B$;
- se A e B sono **finanziamenti**, A è preferibile a B se $i_A < i_B$.

Osserviamo che il confronto tra due operazioni finanziarie comparabili si può fare anche se i tempi di pagamento sono diversi: ad esempio per il pagamento di una moto ci potrebbero proporre il pagamento di tre rate annuali o 10 rate trimestrali (a parte la difficoltà di calcolo per il caso del TIR).

Osservazione Sia A una operazione di **investimento** e sia REA_A il rendimento calcolato secondo un tasso di valutazione i e sia i_A il TIR corrispondente:

REA_A è negativo se i_A è inferiore a i , è positivo se $i_A > i$

In una operazione di **finanziamento** vale invece la disuguaglianza opposta (cioè $REA_A > 0$ se $i > i_A$).

i_A vale che

$$-6000 + \frac{5000}{(1+i)} + \frac{1260}{(1+i)^2}$$

← $REA_{i=0}$

$$-6000 + \frac{5000}{(1+i_A)} + \frac{1260}{(1+i_A)^2} = 0$$

Esercizio 2. Consideriamo questi due possibili investimenti

$$\begin{pmatrix} t & 0 & 1 & 2 \\ A & -1000 & 540 & 540 \\ B & -1200 & 750 & 550 \end{pmatrix}$$

ricavo 50
ricavo 100

Osserviamo preliminarmente che non è significativo confrontare i due REA perché il capitale impegnato è diverso nei due casi.

Scegliere quindi il progetto migliore di finanziamento sulla base del TIR.

$$-1000 + \frac{540}{(1+i)} + \frac{540}{(1+i)^2} = 0 \quad x = (1+i)$$

$$100x^2 - 54x - 54 = 0$$

$$50x^2 - 27x - 27 = 0$$

$$x = \frac{27 \pm \sqrt{27^2 + 4 \times 50 \times 27}}{100}$$

$$(1+i) = \frac{27 + \sqrt{27^2 + 200 \times 27}}{100} = 1,0528$$

$$TIR_A = 5,28\% \quad \text{annuo}$$

$$-1200 + \frac{750}{(1+i)} + \frac{550}{(1+i)^2} = 0 \quad x = (1+i)$$

$$120x^2 - 75x - 55 = 0$$

$$x = \frac{75 \pm \sqrt{75^2 + 120 \times 4 \times 55}}{240} = 1,0581$$

$$= (1+i) \quad \text{TIR}_B = 5,81\%$$

considerare l'investimento B

Esercizio 3. Per l'acquisto di un notebook del valore di 2000 € il venditore propone due possibili forme di pagamento:

- 500 € subito e 1600 € tra 8 mesi;
- 700 € subito, 700 tra 6 mesi e 700 tra 12 mesi.

in Tutto 2100

Quale tra queste due proposte è la più conveniente utilizzando il criterio del TIR ?

$$2000 = 500 + \frac{1600}{(1+i)^{2/3}}$$

$$2000 = 700 + \frac{700}{(1+i_2)} + \frac{700}{(1+i_2)^2}$$

$$1500 = \frac{1600}{(1+i)^{2/3}}$$

$$(1+i)^{2/3} = \frac{16}{15} \quad (1+i) = \left(\frac{16}{15}\right)^{3/2}$$

$$(1+i) = 1,101\dots$$

TIR_x 10,1% annuo

$$1300 - \frac{700}{(1+i)^1} - \frac{700}{(1+i)^2} = 0 \quad x = (1+i)^2$$

$$13x^2 - 7x - 7 = 0$$

$$13x^2 - 7x - 7 = 0$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 7 \times 4 \times 13}}{26}$$

$$(1+i_2) = \frac{7 + \sqrt{49 + 28 \times 13}}{26} = 1,0508$$

5,08% semestrale $i = (1+i_2)^2 - 1$

$TIR_B = i_B$ 10,43%