

Lezione 16

Capitalizzazione composta

Maurizio Pratelli

Capitalizzazione composta

Ricordiamo la **regola della capitalizzazione composta** su un periodo frazionato con interesse sul periodo i_k e tempo misurato secondo il periodo t_k

$$M = C (1 + i_k)^{t_k}$$

Due interessi su due periodi diversi sono **equivalenti** se danno lo stesso montante per qualsiasi tempo t .

Capitalizzazione composta

Ricordiamo la **regola della capitalizzazione composta** su un periodo frazionato con interesse sul periodo i_k e tempo misurato secondo il periodo t_k

$$M = C (1 + i_k)^{t_k}$$

Due interessi su due periodi diversi sono **equivalenti** se danno lo stesso montante per qualsiasi tempo t .

Cominciamo a vedere qual è l'interesse annuo equivalente a i_k : al termine dell'anno si ha

$$C (1 + i_k)^k = C (1 + i)$$

Capitalizzazione composta

Dunque l'interesse frazionario i_k (nella capitalizzazione composta) è **equivalente all'interesse annuo**

$$i = (1 + i_k)^k - 1$$

cioè qualunque sia l'intervallo di tempo i due interessi producono lo stesso risultato.

Infatti, rispetto al tempo misurato in anni indicato t , misurato in frazioni di anno si ha $t_k = k t$ e dunque

$$(1 + i_k)^{t_k} = (1 + i_k)^{k t} = \left((1 + i_k)^k \right)^t = (1 + i)^t$$

Più in generale due interessi frazionari i_h e i_k sono equivalenti se eguale è il loro interesse annuo equivalente, cioè se si ha

$$(1 + i_h)^h = (1 + i_k)^k$$

Si può scrivere una formula di passaggio dall'interesse i_h all'interesse equivalente i_k che però raramente si usa ed è piuttosto complessa, tuttavia per completezza la riportiamo qua sotto:

$$i_k = (1 + i_h)^{\frac{h}{k}} - 1$$

$$C = 1000 (1 + T \times 0,04)$$

$$C = 1000 \times (1 + 0,04)^T$$

Esercizio 1. Confrontare a quanto si rivalutano 1000 € al tasso di interesse annuo del 4 %, secondo i criteri della capitalizzazione semplice e composta, rispettivamente dopo 2, 10 e 20 anni.

Semplice:

1080	€
2400	€
1800	€

Composta

1081,6	€
1480,24	€
2191,12	€



Capitale iniziale e aumento
interesse annuo

Esercizio 2. Un capitale di 10.000 € ha prodotto dopo 5 anni un montante pari a 13382,26 € : a quale tasso d'interesse era stato impiegato?

$$M = C (1+i)^T$$

$$13382,26 = 10000 (1+i)^5$$

$$(1+i)^5 = \frac{13382,26}{10000} = 1,338226$$

$$1+i = (1,338226)^{1/5}$$

$$i = (1,338226)^{1/5} - 1$$

$$= 0,06$$

интерес 6% годово

Esercizio 3. Confrontare in quanto tempo, secondo i criteri della capitalizzazione semplice e composta, un capitale di 10.000 € impiegato al tasso d'interesse annuo del 4 % può diventare 12.000 € .

Comp. semplice

$$12.000 = 10.000 (1 + t \times 0,04)$$

$$1,2 = 1 + t \times 0,04 \quad t \times 0,04 = 0,2$$

$$t = 5 \quad (5 \text{ anni})$$

Comp. compo

$$12.000 = 10.000 \times (1 + 0,04)^T$$

$$1,2 = (1,04)^T$$

$$\log(1,2) = \log(1,04^T) =$$
$$= T \log(1,04)$$

$$T = \frac{\log(1,2)}{\log(1,04)} = 4,648 \text{ anni}$$

Proprietà essenziali dei
logaritmi (in base 10)

$$\log b = x \text{ vuol dire } 10^x = b$$

$$\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$$

$$\log(a^b) = b \log(a)$$

$$\log\left(\frac{1}{a}\right) = \log(a^{-1}) = -\log(a)$$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$$

Una nuova definizione: tasso annuo nominale convertibile k volte in un anno.

Questo significa semplicemente:

- si parte dal tasso annuo nominale i
- si considera il tasso frazionato $i_k = \frac{i}{k}$
- si effettua la capitalizzazione composta rispetto all'interesse frazionato i_k .

Nota bene: il tasso annuo i in realtà è un tasso fittizio.

rend. annuo $\left(1 + \frac{i}{k}\right)^k$

Perché allora si usa questa terminologia?

Esempio

6% nominale con. 4 volte

1,5% Trimestrale e

capitalizzazione trimestrale

Perché allora si usa questa terminologia?

E' usuale, soprattutto in termini commerciali, riferirsi a tassi annui.

Ad esempio si usa dire *“un BOT a 3 mesi che rende il 2,8 % all'anno” ...*

Il realtà il tasso d'interesse di questo BOT è trimestrale, ed è $\frac{2,8}{4} \cdot \%$

Ad esempio, quando una banca propone un “*mutuo ventennale al tasso fisso del 3,5 % annuo*”, in realtà intende questo:

- il mutuo viene pagato attraverso rate di pagamento mensili, ed i calcoli si effettuano secondo la *capitalizzazione composta mese per mese* (il tempo cioè si calcola in mesi, dunque 240 mesi)
- la capitalizzazione composta si calcola con il tasso mensile
 $i_{12} = \frac{0,035}{12} = 0,00291666$, cioè 0,291 % al mese.

Studieremo ammortamenti e mutui più avanti nel corso.

Esercizio. Calcolare il valore attuale di una somma di 10.000 € disponibile tra 21 mesi scontata al tasso annuo nominale convertibile 4 volte all'anno dello 8,5 %.

tempo n calcolato in trimestri
il tasso trimestrale è $\frac{8,5}{4} = 2,125$

il tempo in trimestri

21 mesi = 7 trimestri

$$10000 \times (1,02125)^5 =$$

$$= 11589,75$$

Il valore attuale A di un debito futuro N calcolato secondo il criterio della capitalizzazione composta a un tasso d'interesse annuo i è dato da

$$\begin{aligned} S &= N - A = N - \frac{N}{(1+i)^t} = \\ &= N \left(1 - \frac{1}{(1+i)^t} \right) = N \left(\frac{(1+i)^t - 1}{(1+i)^t} \right) \end{aligned}$$

come si vede una formula piuttosto scomoda (almeno nella pratica commerciale).

È usuale nella pratica introdurre quello che viene chiamato lo **sconto commerciale** d , lo sconto S cioè è dato dalla formula

$$S = N d t$$

dove il tasso d è usualmente annuo e il tempo t calcolato in anni.

Esempio. Una cambiale di 400 € che scade tra due anni viene scontata al tasso di sconto annuale del 5 %: calcolare a quanto può essere riscattata adesso.

Confrontare col prezzo di riscatto calcolato secondo lo stesso interesse ma con la regola della capitalizzazione composta.

scuento commerciale 5%

$$S = 400 \times 0,05 \times 2 = 400 \times 0,1 = 40$$

$$A = N - S = 400 - 40 = 360$$

↑ metodo di riscatto

$$A = \frac{N}{(1+i)^T} = \frac{400}{(1+0,05)^2} =$$

$$= \frac{400}{1,05^2} = 400 \times (1,05)^{-2} =$$

$$= 362,81$$

Esercizio. Volendo investire 3000 € per 30 mesi, ci vengono offerte queste alternative

- a) ■ ricevere alla scadenza 3440 €
- b) ■ investire in regime di capitalizzazione semplice al tasso trimestrale dello 1,5 %
- c) ■ investire in regime di capitalizzazione composta al tasso annuo del 5,5 %

Quale di queste alternative è più conveniente?

a) 3440 €

$$b) M = C (1 + i_4 \tau_4)$$

$$i_4 = 0,015 \quad \tau_4 = 10$$

$$M = 3000 (1 + 0,015 \times 10) =$$
$$= 3000 \times 1,15 = 3450 \text{ €}$$

c)

$$M = 3000 \times (1 + 0,055)^T$$

30 men 2 anni e 6 mesi = 2,5 anni

$$= 3000 \times 1,055^{2,5} =$$

$$= 3429,67$$