

Lezione 15  
Esercizi su capitalizzazione ed attualizzazione semplice  
Introduzione alla capitalizzazione composta

Maurizio Pratelli

Ricordo che tutto il materiale relativo al mio insegnamento (slides e slides modificati, registrazioni delle lezioni ecc..) si può trovare alla pagina

<http://people.dm.unipi.it/pratelli/Giuristi/giuristi.html>

Inoltre il testo di riferimento per questa parte del corso sono le note (anche queste contenute nella mia Home Page)

Alberto Cambini "Matematica Finanziaria" a.a. 2018-19"

anche se noi svolgeremo solo una parte di quelle note.

Buona parte degli esercizi che svolgeremo (ad esempio quelli di questa lezione) sono presi da quelle note.

Nella lezione precedente noi abbiamo visto essenzialmente due formule

$$M = C (1 + i t) \qquad A = \frac{N}{1 + i t}$$

dove  $i$  è l'interesse (semplice) annuo ed il tempo  $t$  è misurato in anni.

Se si considerano **interessi frazionati**  $i_k$  e il tempo è calcolato in **frazioni di anno**, le formule diventano

$$M = C (1 + i_k t_k) \qquad A = \frac{N}{1 + i_k t_k}$$

Esercizio 1. Un capitale di 8000 € in 4 anni, 6 mesi e 10 giorni (rivalutato con un tasso di interesse semplice) ha prodotto un montante di 9068,56 €  
calcolare l'interesse annuo.

$$M = C (1 + iT) \quad \left/ \begin{array}{l} \text{numero di} \\ \text{tempo in anni} \end{array} \right.$$

$$M = 9068,56$$

$$C = 8000$$

$$4 + \frac{6}{12} + \frac{10}{360} =$$

$$= 4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{36} = \frac{144 + 18 + 1}{36} = \frac{163}{36} = 4,52$$

$$iT = \frac{M}{C} - 1 \quad i = \frac{1}{T} \left( \frac{M}{C} - 1 \right)$$

$$\frac{M}{C} - 1 = \frac{9068,56 - 8000}{8000} = \frac{1068,56}{8000}$$

$$i = \frac{1068,56}{4,52 \times 8000} = 0,0297 \dots$$

quindi l'interesse  $i$  è 2,97%

Esercizio 2. Si acquista un BOT del valore nominale di 1000 € e rendimento annuo del 3% , con scadenza tra 6 mesi: calcolare il prezzo d'acquisto.

$$A = \frac{N}{(1 + i\tau)}$$

$$N = 1000$$

$$i = 0,03$$

$$\tau = 0,5$$

$$i\tau = 0,015$$

$$A = \frac{1000}{1 + 0,015} = 985,22$$



Esercizio 3. Si acquista un BOT del valore nominale di 10.000 € e rendimento annuo del 4 %, con scadenza tra un anno, e lo si rivende tra 6 mesi.

Calcolare il prezzo d'acquisto A, il prezzo di vendita V, e determinare il rendimento annuo realizzato detenendo il titolo per 6 mesi.

$$A = \frac{10.000}{1 + 0,04} = 9615,38$$

$$V = \frac{10.000}{1 + 0,02} = 9803,92$$



$$V = A \times \left(1 + \frac{1}{2}i\right) \quad \text{quindi}$$

$$\frac{1}{2}i = \frac{V}{A} - 1, \quad i = 2 \left( \frac{V}{A} - 1 \right) =$$

$$= 2 \left( \frac{9803,92}{9615,38} - 1 \right) = 0,0392$$

ovvero il BOT rende lo 3,92%

## Capitalizzazione (e attualizzazione) composta: introduzione

Se al termine dell'anno l'interesse maturato viene aggiunto al capitale  $C$ , dopo un anno il montante è diventato  $C(1+i)$ , dopo due anni  $C(1+i)^2$  e così via ...

Si arriva pertanto alla **legge della capitalizzazione composta**

$$M = C(1+i)^t$$

dove  $t$  rappresenta il tempo (misurato in anni).

## Capitalizzazione (e attualizzazione) composta: introduzione

Se al termine dell'anno l'interesse maturato viene aggiunto al capitale  $C$ , dopo un anno il montante è diventato  $C(1+i)$ , dopo due anni  $C(1+i)^2$  e così via ...

Si arriva pertanto alla **legge della capitalizzazione composta**

$$M = C(1+i)^t$$

dove  $t$  rappresenta il tempo (misurato in anni).

Questo è evidente se  $t$  è un intero, ma se  $t$  è compreso tra  $n$  e  $n+1$ , sorgono delle difficoltà.

**Esempio:** quanto valgono dopo 3 anni e 4 mesi 10.000 € rivalutati al tasso d'interesse composto del 2,5 % annuo?

Secondo la legge della capitalizzazione composta, poiché  $t = 3 + 1/3 = 10/3$ , il montante è

$$M = C(1 + i)^t = 10000(1 + 0,025)^{\frac{10}{3}} = 10857,90$$

## Capitalizzazione (e attualizzazione) composta: introduzione

Secondo la legge della capitalizzazione composta, poiché  $t = 3 + 1/3 = 10/3$ , il montante è

$$M = C(1 + i)^t = 10000(1 + 0,025)^{\frac{10}{3}} = 10857,90$$

**La banca però applica un altro metodo:** per i primi 3 anni vale la formula della capitalizzazione sopra scritta, per i restanti 4 mesi applica l'interesse semplice.

Allora il montante diviene

$$M = 10000 \times (1 + 0,025)^3 \times (1 + \frac{1}{3} \times 0,025) = 10858,64$$

Questo secondo modo è chiamato talvolta **capitalizzazione composta con convenzione lineare**.

## Capitalizzazione (e attualizzazione) composta: introduzione

Abbiamo visto però che la differenza dei risultati calcolati secondo i due diversi metodi è irrisoria (nell'esempio visto è inferiore a 1 € su un capitale di 10.000 € investito per più di 3 anni); inoltre la seconda formula è molto meno maneggevole, di conseguenza noi adotteremo sempre la prima formula.

A puro titolo d'esempio formalizziamo la formula della capitalizzazione composta con convenzione lineare: se  $t = n + f$  con  $0 \leq f < 1$ , si ha

$$M = C (1 + i)^n (1 + f t)$$

## Capitalizzazione (e attualizzazione) composta: introduzione

Il periodo nel quale gli interessi vengono accreditati può essere differente, ad esempio su un periodo frazionato, se  $i_k$  è l'interesse sul periodo, si ha

$$M = C (1 + i_k)^{t_k}$$

dove  $t_k$  è il tempo misurato secondo il periodo.

## Capitalizzazione (e attualizzazione) composta: introduzione

Il periodo nel quale gli interessi vengono accreditati può essere differente, ad esempio su un periodo frazionato, se  $i_k$  è l'interesse sul periodo, si ha

$$M = C (1 + i_k)^{t_k}$$

dove  $t_k$  è il tempo misurato secondo il periodo.

La formula per l'**attualizzazione composta** è perfettamente analoga

$$A = \frac{N}{(1 + i_k)^{t_k}} = N (1 + i_k)^{-t_k}$$



**ATTENZIONE:** a differenza della capitalizzazione semplice, nella capitalizzazione composta il tasso del 6 % annuale o del 2 % quadrimestrale **non sono affatto equivalenti!**

Nel primo caso il capitale  $C$  diventa dopo un anno

$$M = C \times (1 + 0,06) = C \times 1,06$$

mentre nel secondo caso diventa

$$M = C \times (1 + 0,02)^3 = C \times 1,0612$$

cioè il 2 % trimestrale è diventato il 6,12 % annuale.

**Problema:** sotto quali condizioni due tassi frazionari  $t_h$  e  $t_k$  sono equivalenti in regime di capitalizzazione composta?

Ce ne occuperemo nella prossima lezione.

**Esercizio.** Un capitale di 10.000 € viene investito in capitalizzazione composta al tasso semestrale del 2 % per 3 anni, 3 mesi e 10 giorni: determinare il montante.

$$M = C (1 + i_2)^{t_2}$$

3 anni, 3 mesi, 10 giorni in semestri

$$6 + \frac{1}{2} + \frac{1}{18} = \frac{108 + 9 + 1}{18} = \frac{128}{18} = \frac{59}{9}$$

$$M = 10000 \times (1,02)^{\frac{59}{9}}$$

$$= 11386,20$$

**Esercizio.** Un debito  $D$  di 3000 € esigibile tra un anno e 6 mesi, pattuito con un tasso d'interesse annuo del 4 %, è stato saldato: qual è l'ammontare del saldo?

$$A = \frac{D}{(1+i)^{\tau}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D \times (1+i)^{-\tau}$$

$$D = 3000$$

$$i = 0,04$$

$$\tau = 1,5$$

$$A = \frac{3000}{(1,04)^{15}} = 2828,59$$