Lezione 14
Introduzione alla Matematica Finanziaria
Capitalizzazione ed Attualizzazione: capitalizzazione semplice

Maurizio Pratelli

Bibliografia: Alberto Cambini (2018-19) Matematica Finanziaria.

- Capitalizzazione. La somma C (chiamata capitale), investita oggi (al tempo t=0), produce una somma M (detta montante) al tempo T>O: la differenza I=M-C è chiamata interesse.

  $$M=C+I$$

  Ad esempio si depositano in Banca 1000 € che dopo un anno sono prelevati con gli interessi.

- Attualizzazione. Si cerca oggi (t=0) una somma A (detta valore attuale) in cambio di una somma futura N esigibile al tempo T>0: la differenza S=N-A è detta sconto.

  $$A=N-S$$

  Ad esempio si riscatta oggi un titolo che vale tra 6 mesi 3000 €, oppure si estingue in anticipo un debito di 4000 € con scadenza tra un anno.

Tassi di interesse

L'interesse calcolato su un capitale è dato da un tasso d'interesse e dal tempo trascorso: ad esempio un capitale di 1000 € ad un interesse del 2 % annuo, frutta 1020 € tra un anno e 1010 € tra 6 mesi.
Vale cioè la formula

$$I = C\,.i\,.t$$

Interesse   tasso di interesse

2%

dove i è il tasso d'interesse annuo e t il tempo misurato in anni.

Problema: come si misurano gli anni?

- Anno civile: 365 giorni (366 negli anni bisestili)
- Anno commerciale: un anno di 360 giorni, composto di 12 mesi tutti di 30 giorni

Esempio: come si esprime in anni (commerciali) una durata di 3 anni, 4 mesi e 12 giorni?

- Anno civile: 365 giorni (366 negli anni bisestili)
- Anno commerciale: un anno di 360 giorni, composto di 12 mesi tutti di 30 giorni

Esempio: come si esprime in anni (commerciali) una durata di 3 anni, 4 mesi e 12 giorni?

Soluzione: anni $3 + \frac{4}{12} + \frac{12}{360} = 3{,}1466$

$$3 + \frac{1}{3} + \frac{1}{30} = \frac{90 + 10 + 1}{30} =$$

Anno civile e commerciale

- Anno civile: 365 giorni (366 negli anni bisestili)
- Anno commerciale: un anno di 360 giorni, composto di 12 mesi tutti di 30 giorni

Esempio: come si esprime in anni (commerciali) una durata di 3 anni, 4 mesi e 12 giorni?

Soluzione: anni $3 + \frac{4}{12} + \frac{12}{360} = 3{,}1466$

E come si misura in mesi la stessa durata?

$36 + 4 + \frac{12}{30}$

Anno civile e commerciale

- Anno civile: 365 giorni (366 negli anni bisestili)
- Anno commerciale: un anno di 360 giorni, composto di 12 mesi tutti di 30 giorni

Esempio: come si esprime in anni (commerciali) una durata di 3 anni, 4 mesi e 12 giorni?

Soluzione: anni $3 + \frac{4}{12} + \frac{12}{360} = 3{,}1466$

E come si misura in mesi la stessa durata?

D'ora innanzi useremo sempre l'anno commerciale.

Capitalizzazione semplice e composta

- Interessi semplici: solo il capitale iniziale produce interessi
- Interessi composti: dopo un certo periodo anche gli interessi vengono aggiunti al capitale e producono a loro volta interessi

Si può pensare come esempio a una somma depositata su un conto corrente per un periodo inferiore ad un anno o per periodi superiori.

Questa regola vale sia per la capitalizzazione che per l'attualizzazione: concentriamoci sulla capitalizzazione semplice.

Formule della capitalizzazione semplice

Riprendiamo la formula della capitalizzazione (semplice)

$$M = C\,(1 + i\,t)$$

dove i è il tasso d’interesse annuo e t il tempo misurato in anni.

$I = C \cdot i \cdot t$ $\qquad$ $M = C + I$

Esempio 1: un capitale di 2000 € quale montante produce dopo un anno e 4 mesi a un tasso d’interesse annuo del 2,5 %?

$2{,}5\,\% = 0{,}025$ $\qquad$ $i = 0{,}025$

$$M = 2000\,(1 + 0{,}025 \times 4) = 2000\,(1{,}1) = 2200$$

Esempio 2: un capitale, investito al tasso d'interesse del 2,2 % annuo, ha generato dopo 3 anni un montante di 2984,8 € qual era il capitale iniziale?

$$M = C(1 + it) \qquad C = \frac{M}{1 + it} =$$

$$= \frac{2984,8}{1 + 0,022 \times 3} = \frac{2984,8}{1,066} = 2800$$

Esempio 3: in quanti anni 3000 € investiti al 3% annuo possono diventare 3250 € ?

$$M = C(1 + i\tau) \qquad 1 + i\tau = \frac{M}{C}$$

$$i\tau = \frac{M}{C} - 1 = \frac{M - C}{C} \qquad \tau = \frac{M - C}{Ci} =$$

$$= \frac{3250 - 3000}{3000 \times 0{,}03} = \frac{250}{90} = \frac{25}{9} = 2{,}77\ldots$$

Interessi frazionati

A volte è più comodo usare il tasso d'interesse i_k su una frazione k-sima dell'anno: ad esempio

- i_2 è il tasso d'interesse semestrale
- i_4 è il tasso d'interesse trimestrale

i_3 – Tasso quadrimestrale

Allora la formula del montante diventa

$$M = C\,(1 + i_k\, t_k)$$

dove t_k è il tempo misurato in frazioni k-sime dell'anno.

Esempio: quanto diventa dopo tre anni un capitale di 2500 € investito al tasso quadrimestrale dell' 1,2 % ?

$$M = 2500\,(1 + \underset{i_3}{0{,}012} \times \underset{t_3}{9})$$

È intuitivo che un tasso d'interesse annuo del 4 % o un tasso d'interesse semestrale del 2 % producono lo stesso risultato.

Definizione: due tassi si dicono equivalenti se producono lo stesso interesse sulla stessa durata di tempo.

Il tasso annuo i è equivalente al tasso frazionario $i_k = \frac{i}{k}$ (infatti si ha $t_k = k\,t$).

$$i\tau = i_k \tau_k$$

$$k\,\tau_k = \tau \qquad i\,k\,\tau_k = i_k \tau_k$$

$$i_k = \frac{i}{k}$$

Tassi equivalenti

È intuitivo che un tasso d'interesse annuo del 4 % o un tasso d'interesse semestrale del 2 % producono lo stesso risultato.

Definizione: due tassi si dicono equivalenti se producono lo stesso interesse sulla stessa durata di tempo.

Il tasso annuo i è equivalente al tasso frazionario $i_k = \frac{i}{k}$ (infatti si ha $t_k = k\,t$).

Di conseguenza i tassi i_h e i_k sono equivalenti se $\frac{t_h}{t_k} = \frac{k}{h}$.

$$\frac{i_h}{i_k} = \frac{k}{h}$$

Tassi equivalenti

È intuitivo che un tasso d'interesse annuo del 4 % o un tasso d'interesse semestrale del 2 % producono lo stesso risultato.

Definizione: due tassi si dicono equivalenti se producono lo stesso interesse sulla stessa durata di tempo.

Il tasso annuo i è equivalente al tasso frazionario $i_k = \frac{i}{k}$ (infatti si ha $t_k = k\, t$).

Di conseguenza i tassi i_h e i_k sono equivalenti se $\frac{t_h}{t_k} = \frac{k}{h}$.

Osservazione: ci si può sempre riportare al tasso annuale i.

L'attualizzazione è del tutto speculare alla capitalizzazione, questa volta però è il valore attuale che viene rivalutato al tasso d'interesse di riferimento fino ad arrivare alla somma finale N.
Vale cioè la formula

$$A\left(1 + i\,t\right) = N$$

o equivalentemente

$$A = \frac{N}{1+i\,t}$$

$$M = C\left(1+i\tau\right) \qquad C = \frac{M}{1+i\tau}$$

Esempio Voglio riscattare con 6 mesi di anticipo un debito di 5000 € al tasso d'interesse annuo del 7 % : quanto devo pagare?

$$A = \frac{N}{1+it} = \frac{5000}{1+0,5\times 0,07} = \frac{5000}{1+0,035} = \frac{5000}{1,035} = 4830,91$$

$$A = N - S$$

Esercizio Provare che vale la formula per lo sconto

$$S = N - A = N\left(\frac{i\,t}{1+i\,t}\right)$$

$$S = N - A = N - \frac{N}{1+it} = N\left(1 - \frac{1}{1+it}\right)$$

$$= \left(\frac{1+it-1}{1+it}\right)N = \left(\frac{Nit}{1+it}\right)$$