# Un corso introduttivo sul Calcolo di Malliavin.

Maurizio Pratelli

Anno Accademico 2008-09

# Indice


**1 Calcolo di Malliavin a dimensione finita** **5**

1.1 Regolarità delle leggi di probabilità . . . . . . . . . . . . . . . . . 5
1.2 Derivata, divergenza, operatore di Malliavin . . . . . . . . . . . 9
1.3 Polinomi di Hermite e applicazioni. . . . . . . . . . . . . . . . . . 11
1.4 Un esempio . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 13
1.5 L'operatore di Malliavin . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 15

**2 Calcolo di Malliavin sullo spazio di Wiener.** **23**

2.1 Lo spazio di Wiener. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 23
2.2 Derivata di Malliavin . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 25
2.3 La divergenza o integrale di Skorohod. . . . . . . . . . . . . . . 30
2.4 La formula di Clark–Ocone–Karatzas. . . . . . . . . . . . . . . . 32
2.5 Il semigruppo di Ornstein-Uhlenbeck . . . . . . . . . . . . . . . . 35
2.6 Sviluppo in caos di Wiener . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 39

**3 Equazioni differenziali stocastiche** **47**

3.1 Equazioni differenziali stocastiche. . . . . . . . . . . . . . . . . . 47
3.2 Dimostrazione dei risultati di derivabilità. . . . . . . . . . . . . 50
3.3 Formula di Bismut-Ly-Elworthy e applicazioni . . . . . . . . . 55

# Capitolo 1

# Calcolo di Malliavin su spazi Gaussiani a dimensione finita.

## 1.1 Integrazione per parti e regolarità delle leggi di probabilità.

Introduciamo qualche notazione: indichiamo con $\boldsymbol{\alpha}$ un multi-indice $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ ($\alpha_i$ interi non negativi), siano $|\boldsymbol{\alpha}| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_m$ e $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_m + \beta_m)$.

Indichiamo con $\partial_\alpha$ l'operatore di derivazione $\partial_\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_m}^{\alpha_m}}$.

Consideriamo, su un generico spazio di probabilità $\big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\big)$ una v.a. $m$-dimensionale $\mathbf{F} = \big(F_1, \dots, F_m\big)$ ed una v.a. reale integrabile $G$.

**Definizione 1.1.1.** Si dice che vale una *formula di integrazione per parti* di grado $\boldsymbol{\alpha}$ se esiste una v.a. integrabile $H_\alpha(\mathbf{F}, G)$ tale che, qualunque sia $\varphi \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R}^m)$ valga l'eguaglianza

$$\mathbf{E}\big[(\partial_\alpha \varphi)(\mathbf{F})\, G\big] = \mathbf{E}\big[\varphi(\mathbf{F})\, H_\alpha(\mathbf{F}, G)\big]$$

Se $G = 1$, indichiamo $H_\alpha(\mathbf{F}) = H_\alpha(\mathbf{F}, 1)$; diremo poi più semplicemente *"esiste $H_\alpha(\mathbf{F}, G)$"* invece di dire *"vale la formula di integrazione per parti di grado $\boldsymbol{\alpha}$ per $\mathbf{F}$ e $G$"*.

**Osservazione 1.1.2.** Se esiste $H_\alpha(\mathbf{F}, G)$, esiste $H_{\alpha+\beta}(\mathbf{F}, G)$ se e solo se esiste $H_\beta(\mathbf{F}, H_\alpha(\mathbf{F}, G))$ ed in tal caso si ha $H_{\alpha+\beta}(\mathbf{F}, G) = H_\beta(\mathbf{F}, H_\alpha(\mathbf{F}, G))$.

La dimostrazione è una semplice conseguenza del fatto che si ha $\partial_\beta(\partial_\alpha \varphi) = \partial_{\alpha+\beta}\varphi$.

L'importanza della *formula di integrazione per parti* è dovuta al fatto che permette di dimostrare risultati di regolarità per la legge di probabilità di una v.a. $\mathbf{F}$ ; cominciamo col caso unidimensionale (cioè $F$ a valori reali).

**Teorema 1.1.3.** *Supponiamo che esista $H_1(F)$ : allora la legge di probabilità ha densità data da*

$$f(x) = \mathbf{E}\big[I_{\{F\geq x\}} H_1(F)\big]$$

*Supponiamo che esistano $H_i(F)$ per $i = 1, \ldots, k$ : allora la densità di $F$ è derivabile $k-1$ volte e si ha*

$$f^{(k-1)}(x) = (-1)^{k-1}\mathbf{E}\big[I_{\{F\geq x\}} H_k(F)\big]$$

*Dimostrazione.* Cominciamo col caso $k = 1$ , scegliamo $a < b$ e consideriamo la funzione

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ x-a & a \leq x \leq b \\ b-a & x > b \end{cases}$$

che è derivabile eccetto che nei punti $a$ e $b$ e la cui derivata coincide quasi ovunque con la funzione indicatrice dell'intervallo $[a, b]$ . Si può approssimare $\varphi$ con una successione $(\varphi_n)$ di funzioni $\mathcal{C}^\infty$ tale che $\varphi_n$ converga uniformemente a $\varphi$ e $(\varphi'_n)$ converga (eccetto che nei punti $a$ e $b$) a $\varphi'$ restando uniformemente limitata. Se $\mathbf{P}\{F=a\} = \mathbf{P}\{F=b\} = 0$ , si ottiene

$$\mathbf{P}\big\{a \leq F \leq b\big\} = \mathbf{E}\big[\varphi'(F)\big] = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\big[\varphi'_n(F)\big] = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\big[\varphi_n(F) H_1(F)\big] =$$

$$= \mathbf{E}\big[\varphi(F) H_1(F)\big] = \int_\Omega \mathrm{d}\mathbf{P}\, H_1(F) \int_{[a,b]\cap\{x\leq F\}} \mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\{x\leq F\}} H_1(F)\, \mathrm{d}\mathbf{P} =$$

$$= \int_a^b \mathbf{E}\big[I_{\{F\geq x\}} H_1(F)\big]\, \mathrm{d}x$$

e poi questa eguaglianza si estende evidentemente ad $a$ e $b$ qualsiasi. Notiamo che la densità di $F$ è una funzione continua e limitata.

Vediamo ora il secondo enunciato, limitandoci al caso $k = 2$ : consideriamo la funzione $\psi(t) = (t - x)^+$ , la cui derivata (eccetto che nel punto $t=x$ ) coincide con $I_{[x,+\infty[}(t)$ . La densità di $F$ è eguale a

$$f(x) = \mathbf{E}\big[\psi'(F) H_1(F)\big] = \mathbf{E}\big[\psi(F) H_2(F)\big] = \mathbf{E}\big[(F - x)^+ H_2(F)\big]$$

Questa funzione si può derivare rispetto ad $x$ sotto il segno di integrale ottenendo

$$f'(x) = -\mathbf{E}\big[I_{\{F\geq x\}} H_2(F)\big]$$

□

Consideriamo ora il caso di un vettore aleatorio $m$-dimensionale $\mathbf{F} = (F_1, \ldots, F_n)$: con piccole modifiche il teorema 1.1.3 si estende al seguente risultato (ci limitiamo al caso dell'esistenza della densità):

**Teorema 1.1.4.** *Supponiamo che valga la formula d'integrazione per parti*

$$\mathbf{E}\Big[\frac{\partial^m \varphi}{\partial_{x_1} \ldots \partial_{x_m}}(\mathbf{F})\Big] = \mathbf{E}\big[\varphi(\mathbf{F}) H_{(1,\ldots,1)}(\mathbf{F})\big]$$

*Allora la legge di* $\mathbf{F}$ *ha una densità (continua e limitata) data da*

$$f(x_1, \ldots, x_m) = \mathbf{E}\Big[\prod_{i=1}^{m} I_{\{F_i \geq x_i\}} H_{(1,\ldots,1)}(F)\Big]$$

Malliavin usa invece un criterio leggermente diverso, di dimostrazione più complessa, che ora enunciamo:

**Teorema 1.1.5.** *Supponiamo che per ogni* $i = 1, \ldots, m$ *esista una costante* $C_i$ *tale che, qualunque sia* $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^m)$ *si abbia*

$$\Big|\mathbf{E}\big[\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\mathbf{F})\big]\Big| \leq C_i \|\varphi\|_\infty$$

*allora la legge di* $\mathbf{F}$ *ha una densità che appartiene a* $L^{\frac{m}{m-1}}$ .

*Supponiamo che per ogni multiindice* $\boldsymbol{\alpha}$ *e per ogni* $\varphi \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R}^m)$ *valga una diseguaglianza della forma*

$$\Big|\mathbf{E}\big[\partial_\alpha \varphi(\mathbf{F})\big]\Big| \leq C_\alpha \|\varphi\|_\infty$$

*(con una costante* $C_\alpha$ *che non dipende da* $\varphi$ *): allora la densità di* $\mathbf{F}$ *è* $\mathcal{C}^\infty$ .

Osserviamo che per $m = 1$ i teoremi 1.1.3 e 1.1.5 sono essenzialmente lo stesso risultato, mentre a dimensione maggiore i due risultati sono non confrontabili: l'ipotesi del teorema 1.1.5 è infatti molto più debole, tuttavia si ottiene un risultato meno forte di regolarità della densità.

La dimostrazione del teorema 1.1.5 è decisamente più complessa: ci limitiamo al caso $m = 2$ ed al primo enunciato (cioè la legge di $\mathbf{F}$ ha una densità che appartiene a $L^2$ ).

*Dimostrazione.* Prendiamo $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^2)$ e siano $v(x_1) = \sup_{x_2 \in \mathbb{R}} |\varphi(x_1, x_2)|$ e $w(x_2) = \sup_{x_1 \in \mathbb{R}} |\varphi(x_1, x_2)|$ .

Vale la diseguaglianza $v(x_1) \leq \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \big|\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x_1, x_2)\big| \mathrm{d}x_2$ , e la diseguaglianza analoga per $w(x_2)$ .

Si ha pertanto

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \varphi^2 \, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \leq \int v(x_1)\mathrm{d}x_1 \int w(x_2)\mathrm{d}x_2 \leq$$

$$\leq \Big( \iint \Big| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \Big| \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \Big) \Big( \iint \Big| \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \Big| \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \Big)$$

Questa diseguaglianza si può riscrivere nella forma

$$\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \Big\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \Big\|^{1/2}_{L^1(\mathbb{R}^2)} . \Big\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \Big\|^{1/2}_{L^1(\mathbb{R}^2)}$$

che, nel caso $m$ qualsiasi, è sostituita dalla *diseguaglianza di Gagliardo-Nirenberg*:

$$\|\varphi\|_{L^{\frac{m}{m-1}}(\mathbb{R}^m)} \leq \prod_{i=1}^{m} \Big\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \Big\|^{1/m}_{L^1(\mathbb{R}^m)}$$

Chiamiamo $\mathbf{m}$ la legge di probabilità di $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$ e notiamo che la condizione del teorema si può riscrivere nella forma

$$\Big| \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x_1, x_2) \, \mathbf{m}(\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2) \Big| \leq C. \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} |\varphi(\mathbf{x})|$$

Scegliamo $\rho \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^2)$ a valori positivi, con $\int_{\mathbb{R}^2} \rho(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y} = 1$ e $\rho(\mathbf{y}) = 0$ per $|\mathbf{y}| > 1$ e sia, per $\varepsilon > 0$ , $\rho_\varepsilon(\mathbf{x}) = \dfrac{1}{\varepsilon^2} \rho\big(\dfrac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\big)$ .

Chiamiamo poi $\varphi_\varepsilon(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} \rho_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y})\mathbf{m}(\mathrm{d}\mathbf{y})$ : è facile vedere che ogni $\varphi_\varepsilon$ è una densità di probabilità. Inoltre le probabilità $\varphi_\varepsilon(\mathbf{x}).\mathrm{d}\mathbf{x}$ convergono debolmente a $\mathbf{m}$ : infatti, presa $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^2)$ si ha

$$\int_{\mathbb{R}^2} \varphi_\varepsilon(\mathbf{x}) \, g(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{m}(\mathrm{d}\mathbf{y}) \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{\varepsilon^2} \rho\big(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\varepsilon}\big) \, g(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}\mathbf{x} =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{m}(\mathrm{d}\mathbf{y}) \int_{\mathbb{R}^2} \rho(\mathbf{z}) \, g(\mathbf{y} + \varepsilon \mathbf{z}) \, \mathrm{d}\mathbf{z}$$

ed è immediato constatare che questi integrali convergono, quando $\varepsilon \to 0+$ , a $\int_{\mathbb{R}^2} g(\mathbf{y}) \, \mathbf{m}(\mathrm{d}\mathbf{y})$ .

Inoltre le funzioni $\varphi_\varepsilon$ sono equilimitate in $L^2(\mathbb{R}^2)$ : infatti presa $\psi \in \mathcal{C}^1_c(\mathbb{R}^2)$ si ha

$$\Big| \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \, \psi(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}\mathbf{x} \Big| = \Big| \int_{\mathbb{R}^2} \varphi_\varepsilon(\mathbf{x}) \, \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} \Big| =$$

$$= \Big| \int_{\mathbb{R}^2} \rho(\mathbf{z})\mathrm{d}\mathbf{z} \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{m}(\mathrm{d}\mathbf{y}) \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(\mathbf{y} + \varepsilon \mathbf{z}) \Big| \leq C \sup_x \big|\psi(\mathbf{x})\big|$$

e da questo segue che si ha $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \Big|\frac{\partial\varphi_\varepsilon}{\partial x_i}(\mathbf{x})\Big| \,\mathrm{d}\mathbf{x} \leq C$: questo perchè, presa $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, si ha

$$\int |f| \,\mathrm{d}\mathbf{x} = \sup\Big\{ \int f\, g \,\mathrm{d}\mathbf{x} \,\Big|\, g \in \mathcal{C}^1_c(\mathbb{R}^n)\ ,\ |g(\mathbf{x})| \leq 1 \Big\}$$

Sfruttando la diseguaglianza precedentemente stabilita, si ottiene $\big\|\varphi_\varepsilon\big\|_{L^2} \leq C$. Prendiamo allora una successione $\varepsilon_n \to 0$ tale che $\varphi_{\varepsilon_n}$ converga a $\theta$ debolmente in $L^2$: poichè la successione di probabilità $\varphi_{\varepsilon_n}(\mathbf{x}).\mathrm{d}\mathbf{x}$ converge debolmente a $\mathbf{m}$, ne segue l'eguaglianza $\mathbf{m}(\mathrm{d}\mathbf{x}) = \theta(\mathbf{x}).\mathrm{d}\mathbf{x}$ (e si ha inoltre $\|\theta\|_{L^2} \leq C$).

□

## 1.2 Derivata, divergenza e operatore di Malliavin in spazi Gaussiani a dimensione finita.

Sia $\gamma_n$ la misura gaussiana standard su $\mathbb{R}^n$ (avente densità $(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{2}}$ rispetto alla misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^n$), e indichiamo brevemente $L^2(\gamma_n) = L^2\big(\mathbb{R}^n\,,\,\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\,,\,\gamma_n\big)$. Osserviamo che i polinomi appartengono a $L^p(\gamma_n)$ per ogni $1 \leq p < +\infty$.

**Proposizione 1.2.1.** *I polinomi sono densi in* $L^2(\gamma_n)$.

*Dimostrazione.* Preso $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^n$, indichiamo $\mathbf{x}^{\mathbf{k}} = x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$ e consideriamo $\varphi \in L^2(\gamma_n)$ ortogonale ad ogni polinomio. Definiamo poi

$$F(\mathbf{t}) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\mathbf{x})\,\mathrm{e}^{-i\mathbf{t}.\mathbf{x}-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{2}}\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

La funzione $F(\mathbf{t})$ è analitica intera e si ha, per ogni $\mathbf{k}$,

$$F^{\mathbf{k}}(0) = \frac{(-i)^{|\mathbf{k}|}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int \mathbf{x}^{\mathbf{k}}\,\varphi(\mathbf{x})\,\mathrm{e}^{-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{2}}\,\mathrm{d}\mathbf{x} \;=\; 0$$

Di conseguenza $F \equiv 0$, cioè la trasformata di Fourier della funzione $\varphi(\mathbf{x})\mathrm{e}^{-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{2}}$ è identicamente 0 e quindi $\varphi \equiv 0$. □

Sia $\mathcal{P}$ lo spazio delle funzioni $f \in C^\infty$ tali che ogni derivata di $f$ sia a crescita al più polinomiale e definiamo l'operatore di **derivata** o **gradiente** $D : \mathcal{P} \subseteq L^2\big(\mathbb{R}^n, \gamma_n\big) \longrightarrow \mathcal{P}^n \subseteq L^2\big(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n, \gamma_n\big)$ definito da $Df = \big(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\big)$.

L'operatore aggiunto $D^* : \mathcal{P}^n \longrightarrow L^2(\gamma_n)$ (chiamato **divergenza**) è

$$D^*(g_1, \ldots, g_n) = -\sum_{i\le n} \frac{\partial g_i}{\partial x_i} + \sum_{i\le n} x_i . g_i = -\mathrm{div}(\mathbf{g}) + \mathbf{x}.\mathbf{g}$$

Si ha infatti

$$\int \frac{\partial f}{\partial x_i}\, g_i\, \mathrm{e}^{-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{2}} \mathrm{d}\mathbf{x} = -\int f \frac{\partial}{\partial x_i}\big(g_i \mathrm{e}^{-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{2}}\big)\, \mathrm{d}\mathbf{x} = \int f\big(-\frac{\partial g_i}{\partial x_i} + x_i.g_i\big)\mathrm{e}^{-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{2}} \mathrm{d}\mathbf{x}$$

L'operatore $L = D^* D$ è chiamato **operatore di Malliavin**: è facile constatare che si ha

$$\big(Lf\big)(\mathbf{x}) = -\sum_{i\le n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\mathbf{x}) + \sum_{i\le n} x_i . \frac{\partial f}{\partial x_i} = -\Delta f(\mathbf{x}) + \mathbf{x}.\nabla f(\mathbf{x})$$

Preso $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ , definiamo $D_{\mathbf{a}} f = \sum_{i\le n} a_i D_i f$ : si ha

**Proposizione 1.2.2 (Formula di integrazione per parti).** *Vale la formula*

$$\int_{\mathbb{R}^n} (D_{\mathbf{a}} f) g\, \mathrm{d}\gamma_n = \int_{\mathbb{R}^n} \big[ - f D_{\mathbf{a}} g \,+\, f g\, \mathbf{x}.\mathbf{a}\big] \mathrm{d}\gamma_n$$

La *dimostrazione* è immediata; notiamo che la variable aleatoria $\mathbf{x} \to \mathbf{x}.\mathbf{a}$ ha legge gaussiana $N\big(0, \|\mathbf{a}\|^2\big)$ .

Si verificano facilmente le identità seguenti:

$$D^*\big(f\, Dg\big) = -\langle Df, Dg\rangle \,+\, f Lg \qquad \text{e} \qquad DD^* = D^* D + I$$

La seconda è da intendersi nel senso seguente: considerata $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_n)$ , si ha $D_i(D^* g) = g_i + D^*(D_i\, g)$ .

Si definisce ancora l'operatore **quadrato del campo**

$$\Gamma(f, g) = L\big(fg\big) - f Lg - g Lf = -2\langle Df, Dg\rangle$$

Naturalmente gli operatori $D$ e $D^*$ possono essere estesi da $\mathcal{P}$ o $\mathcal{P}^n$ a uno spazio più ampio di funzioni: ad esempio lo spazio naturale sul quale è definito $D$ in modo che $Df \in L^2(\gamma_n)$ è

$$\mathbb{D}^{1,2} = \Big\{ f \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{R}^n) \,\Big|\, f \in L^2(\gamma_n)\, ,\, \partial_i f \in L^2(\gamma_n)\, ,\, \forall i \Big\}$$

con la norma evidente. Gli spazi naturali sui quali sono definiti gli operatori sopra indicati possono però essere meglio rappresentati con i *polinomi di Hermite* che verranno introdotti nel prossimo paragrafo.

## 1.3 Polinomi di Hermite e applicazioni.

I **polinomi di Hermite** su $\mathbb{R}$ sono definiti ricorsivamente dalle eguaglianze $H_0(x) = 1\,,\quad H_n(.) = D^* H_{n-1}(.) = (D^*)^n 1\,.$ Poiché $D^* f = -\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + x.f$ , si constata immediatamente che $H_n(x) = x^n + \ldots$ e di conseguenza l'insieme $\big(H_n(.)\big)_{n\geq 0}$ è un insieme **totale** in $L^2(\gamma_1)$ .

Si ha ad esempio $H_1(x) = x\,,\quad H_2(x) = x^2 - 1\,,\quad H_3(x) = x^3 - 3x\,\ldots$ Inoltre

$$(H_n|H_m)_{L^2(\gamma_1)} \;=\; \begin{cases} n! & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

Supponendo infatti $m \leq n$ , $(H_n|H_m)_{L^2(\gamma_1)} = (1|D^n H_m)_{L^2(\gamma_1)}$ , e la conclusione è immediata.

Si arriva così al seguente risultato:

**Proposizione 1.3.1.** *La successione di funzioni* $\big(\frac{1}{\sqrt{n}} H_n(.)\big)_{n\geq 0}$ *è un* sistema ortonormale completo *in* $L^2(\gamma_1)$ *.*

Quindi ogni $f \in L^2(\mathbb{R}, \gamma_1)$ si può scrivere nella forma

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} c_n\, H_n(x) = \sum_{n\geq 0} c_n \sqrt{n!}\;\frac{H_n(x)}{\sqrt{n!}}$$

dove i coefficienti $c_n$ sono tali che $\sum_{n\geq 0} c_n^2 .n! < +\infty$, e la serie converge in $L^2(\gamma_1)$. Si ha

$$c_n = \frac{1}{n!}\int_{\mathbb{R}} f(x) H_n(x)\,\mathrm{d}\gamma_1(x)$$

e, se esiste $\dfrac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n} \in L^2(\gamma_1)$ , si ha

$$c_n = \frac{1}{n!}\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n}\,\mathrm{d}\gamma_1(x)$$

**Proposizione 1.3.2.** *Vale l'identità*

$$\exp\big(tx - \frac{t^2}{2}\big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}\, H_n(x)$$

*Dimostrazione.* Infatti $\exp\big(tx - \frac{t^2}{2}\big) = \sum_{n\geq 0} c_n(t)\, H_n(x)$ , dove

$$c_n(t) = \frac{1}{n!}\int \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \mathrm{e}^{tx - \frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}\gamma_1(x) = \frac{t^n}{n!\sqrt{2\pi}}\int \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-t)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{t^n}{n!}$$

□

Notiamo che il fatto che l'eguaglianza sopra scritta valga per ogni $t$ determina i polinomi di Hermite e ne fornisce una *definizione alternativa*. Di conseguenza si ha

$$H_n(x) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} \exp\big(tx - \frac{t^2}{2}\big)\Big|_{t=0} = (-1)^n \exp\big(\frac{x^2}{2}\big) \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \exp\big(-\frac{x^2}{2}\big)$$

Abbiamo visto che, per definizione, $D^* H_n(.) = H_{n+1}(.)$ , vediamo ora che $DH_n(.) = nH_{n-1}(.)$ . Si ha infatti

$$(DH_n|H_m)_{L^2(\gamma_1)} = (H_n|H_{m+1})_{L^2(\gamma_1)} = \begin{cases} 0 & m \neq n-1 \\ n.(n-1)! & m = n-1 \end{cases}$$

Inoltre $LH_n(.) = D^* DH_n(.) = nH_n(.)$ : ne segue che gli autovalori dell'operatore $L$ sullo spazio $L^2(\gamma_1)$ sono $0, 1, 2, \ldots$ e gli autospazi corrispondenti sono i sottospazi generati rispettivamente da $H_0$, $H_1, \ldots$

Si ottiene di conseguenza il seguente risultato:

**Proposizione 1.3.3.** *Sia $f \in L^2(\gamma_1)$ scritta nello sviluppo $f = \sum_{n\geq 0} c_n H_n$ con $\sum_{n\geq 0} c_n^2 .n! < +\infty$ :*

- *$f$ appartiene al dominio di $D$ se $\sum_{n\geq 1} c_n^2 .n.n! < +\infty$ e in tal caso $Df = \sum_{n\geq 1} n\, c_n\, H_{n-1}$ ;*
- *$f$ appartiene al dominio di $D^*$ se $\sum_{n\geq 0} c_n^2 .(n+1)! < +\infty$ e in tal caso $D^* f = \sum_{n\geq 0} c_n H_{n+1}$ ;*
- *$f$ appartiene al dominio di $L$ se $\sum_{n\geq 1} c_n^2 .n^2 .n! < +\infty$ e in tal caso $Lf = \sum_{n\geq 1} n\, c_n\, H_n$ .*

Guardiamo l'operatore $(I+L)$ che ammette la rappresentazione spettrale $I+L = \sum_{n\geq 0}(1+n)P_n$ dove $P_n$ è la proiezione ortogonale sul sottospazio generato da $H_n$ : poiché gli autovalori sono tutti positivi si può definire, per $s > 0$ non necessariamente intero, $(I+L)^s = \sum_{n\geq 0}(1+n)^s P_n$ .

Cioè $f$ appartiene al dominio di $(I+L)^s$ se $\sum_{n\geq 0}(1+n)^{2s} c_n^2\, n! < +\infty$ e in tal caso $(I+L)^s f = \sum_{n\geq 0}(1+n)^s c_n H_n$ .

È facile vedere che coincidono i domini degli operatori $D$, $D^*$, $(I+L)^{1/2}$ (questo risultato naturalmente non è vero in $L^2(\gamma_n)$ ). Inoltre la rappresentazione come sviluppo in polinomi di Hermite permette di dare una definizione più esplicita dello spazio $\mathbb{D}^{1,2}$ definito nel paragrafo precedente: infatti $D^{1,2}$ è il *completamento* di $\mathcal{P}$ (cioè delle funzioni infinitamente derivabili a crescita polinomiale) rispetto alla norma $\|f\|_{1,2} = \|(I+L)^{1/2} f\|_2$ .

Se si considera lo spazio delle funzioni derivabili $k$ volte, tali che tutte le derivate fino all'ordine $k$ stiano il $L^p$ $(p \geq 2)$, si considera lo spazio $\mathbb{D}^{k,p}$ che è la chiusura di $\mathcal{P}$ rispetto alla norma $\|f\|_{k,p} = \|(I+L)^{k/2} f\|_p$ .

Si pone poi $\mathbb{D}^{k,\infty} = \bigcap_{p\geq 2} \mathbb{D}^{k,p}$ (notiamo infatti che non è naturale imporre che le derivate stiano in $L^\infty$ perchè gli stessi polinomi non verificano questa condizione, ma solo che abbiano ogni potenza sommabile), infine $\mathbb{D}^\infty = \bigcap_{k\geq 1} \bigcap_{p\geq 2} \mathbb{D}^{k,p}$ .

I **polinomi di Hermite su $\mathbb{R}^n$** sono definiti a partire dai polinomi di Hermite su $\mathbb{R}$ mediante la formula $H_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1,\dots,n} H_{\alpha_i}(x_i)$ : tenendo conto del fatto che la misura gaussiana standard $n$–dimensionale è il prodotto della misura gaussiana su $\mathbb{R}$ con sè stessa (cioè $\gamma_n(\mathrm{d}\mathbf{x}) = \gamma_1(\mathrm{d}x_1) \otimes \cdots \otimes \gamma_1(\mathrm{d}x_n)$) si ottengono facilmente i seguenti risultati:

- si ha
$$(H_{\boldsymbol{\alpha}} | H_{\boldsymbol{\beta}})_{L^2(\gamma_n)} = \begin{cases} 0 & \boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\alpha}! & \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta} \end{cases}$$
dove $\boldsymbol{\alpha}! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$ ,

- la famiglia di funzioni $\big(\frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{\alpha}!}} H_{\boldsymbol{\alpha}}(.)\big)$ è un sistema ortonormale completo in $L^2(\gamma_n)$ ,

- si ha $LH_{\boldsymbol{\alpha}} = |\boldsymbol{\alpha}| H_{\boldsymbol{\alpha}}$ e di conseguenza l'operatore di Malliavin $L$ su $L^2(\gamma_n)$ ha come autovalori $0, 1, 2, \dots$ e l'autospazio corrispondente all'autovalore $k$ è generato dai polinomi $H_{\boldsymbol{\alpha}}$ con $|\boldsymbol{\alpha}| = k$ ,

- vale la formula $\exp(\mathbf{t}.\mathbf{x} - \frac{\|\mathbf{t}\|^2}{2}) = \sum_{\boldsymbol{\alpha}} \frac{\mathbf{t}^{\boldsymbol{\alpha}}}{\boldsymbol{\alpha}!} H_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x})$ .

Vediamo ad esempio la dimostrazione dell'ultima affermazione:

$$\exp\big(\mathbf{t}.\mathbf{x} - \frac{\|\mathbf{t}\|^2}{2}\big) = \prod_{i=1}^n \exp\big(t_i x_i - \frac{t_i^2}{2}\big) = \prod_{i=1}^n \Big(\sum_{n\geq 0} \frac{t_i^n}{n!} H_n(x_i)\Big) = \sum_{\boldsymbol{\alpha}} \frac{\mathbf{t}^{\boldsymbol{\alpha}}}{\boldsymbol{\alpha}!} H_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x})$$

## 1.4 Un esempio di applicazione della regola di integrazione per parti.

Scopo di questa sezione è fornire un esempio nel quale si mostra come i risultati del primo paragrafo, uniti alle regole della derivata e divergenza sullo spazio $L^2(\gamma_n)$ , possono provare l'esistenza della densità per la legge di probabilità di un vettore aleatorio: i conti presentati possono sembrare strani, ma sono una traduzione nel caso dello spazio Gaussiano finito–dimensionale di alcuni passaggi che hanno consentito a Malliavin di provare il teorema di Hörmander di caratterizzazione degli operatori *ipoellittici*.

Sia dunque $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_m)$ un vettore aleatorio $m$–dimensionale definito su $\mathbb{R}^n$ e supponiamo che ogni $F_i \in \mathbb{D}^{2,p}$ con un opportuno $p$ da determinare: si chiama **matrice di Malliavin** la matrice $m \times m$

$$A_{i,j}(\mathbf{x}) = \langle DF_i, DF_j \rangle(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n} D_k F_i(\mathbf{x}) D_k F_j(\mathbf{x})$$

La matrice $A(.) = \big[A_{i,j}\big](.)$ è evidentemente *simmetrica semidefinita–positiva*: noi supponiamo che $A(.)$ sia ovunque *definita positiva*, ossia che si abbia $\det A(\mathbf{x}) > 0$ ovunque.

Prendiamo $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^m)$, si ha: $D\,\varphi(\mathbf{F}) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\mathbf{F})\, DF_i$ e di conseguenza, preso $1 \leq l \leq m$

$$\langle D\,\varphi(\mathbf{F})\,,\, DF_l \rangle = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\mathbf{F})\, \langle DF_i, DF_l \rangle = \Big[A\big(\nabla\varphi)(\mathbf{F})\Big]_l$$

Occorre fare distinzione tra $D\,\varphi(\mathbf{F})$ (derivata, nel senso di Malliavin, della v.a. $\mathbf{x} \to \varphi(\mathbf{F}(\mathbf{x}))$, che è un vettore di $\mathbb{R}^n$) e $\big(\nabla\varphi\big)(\mathbf{F})$ (gradiente della funzione $\varphi$ calcolato in $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, che è viceversa un vettore di $\mathbb{R}^m$ ).

L'equazione sopra scritta si può riscrivere in termini vettoriali $A\,(\nabla\varphi)(\mathbf{F}) = \langle D\,\varphi(\mathbf{F}), D\mathbf{F} \rangle$ , e, poichè la matrice $A$ è invertibile, si ha

$$\big(\nabla\varphi\big)(\mathbf{F}) \;=\; A^{-1} \langle D\,\varphi(\mathbf{F}), D\mathbf{F} \rangle = \langle D\,\varphi(\mathbf{F}), A^{-1} D\mathbf{F} \rangle$$

cioè, per ogni $1 \leq i \leq n$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\big(\mathbf{F}\big) = \sum_{j=1}^{m} \langle D\,\varphi(\mathbf{F}), A_{i,j}^{-1} DF_j \rangle$$

e quindi

$$\mathbf{E}\Big[\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\mathbf{F})\Big] = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{E}\Big[\varphi(\mathbf{F}) D^*\big(A_{i,j}^{-1} DF_j\big)\Big]$$

Ricordando la formula $D^*\big(F\,DG) = -\langle DF, DG \rangle + F\,LG$ , si ottiene

$$\mathbf{E}\Big[\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\mathbf{F})\Big] = \mathbf{E}\Big[\varphi(\mathbf{F})\,\Big(-\sum_{j=1}^{m} \langle DA_{i,j}^{-1}\,,\, DF_j \rangle + \sum_{j=1}^{m} A_{i,j}^{-1} LF_j\Big)\Big]$$

Si può dunque applicare il Teorema 1.1.5 a patto di poter garantire che le v.a. $\big( - \sum_{j=1}^{m} \langle DA^{-1}_{i,j}\, , DF_j \rangle + \sum_{j=1}^{m} A^{-1}_{i,j} LF_j \big)$ siano integrabili. I calcolo precedenti possono essere riassunti nel seguente risultato:

**Teorema 1.4.1.** *Supponiamo che, oltre alle ipotesi precedentemente scritte, ogni* $F_i \in \mathbb{D}^{2,2}$ *, che ogni* $A^{-1}_{i,j} \in L^2$ *e che* $D(A^{-1}_{i,j}) \in L^2$ *: allora la v.a. vettoriale* $\mathbf{F}$ *ha una densità che appartiene a* $L^{\frac{m}{m-1}}(\gamma_n)$ *.*

## 1.5 L'operatore di Malliavin ed il processo di Ornstein-Uhlenbeck.

Per semplicità ci limitiamo a definire *processi di Markov* limitatamente a processi stocastici a valori reali (o a valori in $\mathbb{R}^n$ .).

**Definizione 1.5.1.** Un processo stocastico $(X_t)_{0\le t\le T}$ si chiama *processo di Markov in senso stretto, omogeneo nel tempo* se per ogni $s < t$ esiste un *nucleo* (o probabilità di transizione) $P_{t-s}$ tale che, qualunque sia $f$ boreliana limitata, si abbia $\mathbf{E}\big[f(X_t)\big|\mathcal{F}_s\big] = \big(P_{t-s}f\big)(X_s)$ .

In molti esempi esiste un opportuno spazio di Banach di funzioni $B$ tale che la famiglia di operatori sia un *semigruppo di classe* $C_0$ su $B$ (usualmente chiamato semigruppo di transizione).

**Definizione 1.5.2.** Si chiama semigruppo di classe $C_0$ di operatori su $B$ una famiglia di operatori $(P_t)_{t\ge0}$ tale che valga l'eguaglianza $P_{t+s} = P_t P_s$ (proprietà di *semigruppo*) e che, per ogni $x \in B$, si abbia $\lim_{t\to0+} P_t x = x$ .

È evidente che si deve avere $P_0 = I$ (dove $I$ è l'operatore identità).

**Definizione 1.5.3 (Generatore infinitesimale).** Assegnato un semigruppo di classe $C_0$ su $B$, si chiama *generatore infinitesimale* l'operatore $A$ così definito: $x \in \mathrm{Dom}(A)$ se esiste $\lim\limits_{t\to0+} \dfrac{P_t x - x}{t}$ , e in tal caso $Ax = \lim\limits_{t\to0+} \dfrac{P_t x - x}{t}$ .

**Esempio 1.5.4 (Il semigruppo del processo di Wiener).** Prendiamo $s, t$ positivi, ed $f$ boreliana limitata:

$$\mathbf{E}\big[f(W_{t+s})\big|\mathcal{F}_s\big] = \mathbf{E}\big[f(W_s + (W_{t+s} - W_s))\big|\mathcal{F}_s\big] = (P_t f)(W_s)$$

dove $\big(P_t f\big)(x) = \mathbf{E}\big[f(x + (W_{t+s} - W_s))\big]$ . Notiamo che, poichè $(W_{t+s} - W_s)$ ha legge $N(0, t)$, è eguale in legge a $\sqrt{t}\, Y$ dove $Y$ è gaussiana standard $N(0, 1)$ e quindi si può scrivere

$$(P_t f) = \mathbf{E}\big[f(x + \sqrt{t}\, Y)\big] = \int_{\mathbb{R}} f(x + \sqrt{t}\, y) \frac{\mathrm{e}^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} f(x + \sqrt{t}\, y)\gamma_1(\mathrm{d}y).$$

$P_t$ è un semigruppo di operatori di classe $C_0$ sullo spazio $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ delle funzioni continue infinitesime all'infinito (che è di Banach con la norma $\|.\|_\infty$ ): presa una tale $f$ (e osservando che dato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che si abbia $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ se $|x - y| < \delta$) si ha infatti

$$\big|P_t f(x) - f(x)\big| = \big|\mathbf{E}\big[-f(x) + f(x + \sqrt{t}\,Y)\big]\big| \leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty\, \mathbf{P}\big\{|Y| > \frac{\delta}{\sqrt{t}}\big\}$$

dove $Y$ è una v.a. con densità $N(0,1)$ . È un facile esercizio provare che la quantità sopra scritta è arbitrariamente piccola per $t$ sufficientemente piccolo.

Se si considera un processo di Wiener $n$–dimensionale, i conti sono esattamente gli stessi con la probabilità $\gamma_1$ sostituita da $\gamma_n$ .

**Esempio 1.5.5 (Il semigruppo di Ornstein-Uhlenbeck).** Il processo di Ornstein-Uhlenbeck entra in modo strumentale nel calcolo di Malliavin poiché, come vedremo, il generatore infinitesimale del suo semigruppo di transizione coincide con l'operatore di Malliavin (a meno del segno).

Si chiama processo di Ornstein-Uhlenbeck un processo che sia soluzione dell'equazione differenziale stocastica

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t = -X_t\,\mathrm{d}t + \sqrt{2}\mathrm{d}W_t \\ X_0 = x \end{cases} \tag{1.5.1}$$

Non è difficile, utilizzando la formula di Ito, provare che tale soluzione è data da $X_t^x = x\,\mathrm{e}^{-t} + \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-t}\int_0^t \mathrm{e}^s\,\mathrm{d}W_s$ (con questa scrittura si mette in evidenza il dato iniziale $x$).

Più in generale, se si considera la stessa equazione però con dato iniziale $V$ (dove $V$ è una v.a. $\mathcal{F}_0$-misurabile), si ottiene $X_t = V\mathrm{e}^{-t} + \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-t}\int_0^t \mathrm{e}^s \mathrm{d}W_s$ . In particolare, presi $s, t$ positivi

$$X_{s+t} = X_s\,\mathrm{e}^{-t} + \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-t}\int_0^t \mathrm{e}^u\,\mathrm{d}W_u^* \quad \text{dove} \quad W_u^* = W_{u+s} - W_s$$

Quindi, con passaggi simili a quelli appena svolti, si ottiene $\mathbf{E}\big[f(X_{s+t})\big|\mathcal{F}_s\big] = \big(T_t f\big)(X_s)$ , dove

$$\big(T_t f\big)(x) = \mathbf{E}\Big[f\Big(x\,\mathrm{e}^{-t} + \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-t}\int_0^t \mathrm{e}^u \mathrm{d}W_u^*\Big)\Big]$$

Notando che $W_u^*$ è ancora un processo di Wiener e che la v.a. $\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-t}\int_0^t \mathrm{e}^u \mathrm{d}W_u^*$ è gaussiana con media 0 e varianza $(1 - \mathrm{e}^{-2t})$ , si ha

$$\big(T_t f\big)(x) = \mathbf{E}\Big[f\Big(x\,\mathrm{e}^{-t} + \sqrt{1 - \mathrm{e}^{-2t}}\,Y\Big)\Big] = \int_{\mathbb{R}} f\Big(x\,\mathrm{e}^{-t} + \sqrt{1 - \mathrm{e}^{-2t}}\,y\Big)\,\gamma_1(\mathrm{d}y)$$

(dove $Y$ è una v.a. con densità $N(0,1)$).

Più in generale, in $\mathbb{R}^n$, si ha

$$\big(T_t f\big)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} f\big(\mathbf{x}\,\mathrm{e}^{-t} + \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}\,\mathbf{y}\big)\,\gamma_n(\mathrm{d}\mathbf{y})$$

Con conti simili a quelli svolti precedentemente si prova che $(T_t)$ è un semigruppo di operatori di classe $C_0$ sullo spazio di Banach $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ (o $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$ ).

Esaminiamo ora le proprietà dei due semigruppi di transizione del processo di Wiener e di Ornstein-Uhlenbeck in $\mathbb{R}^n$.

**Proposizione 1.5.6.** *Il semigruppo di transizione del processo di Wiener $n$–dimensionale $(P_t)_{t\geq 0}$ gode delle seguenti proprietà:*

*a) $(P_t)_{t\geq 0}$ è un semigruppo di contrazioni su $L^p(\mathbb{R}^n)$ per $1 \leq p \leq +\infty$ ,*

*b) ogni $P_t$ è un operatore simmetrico in $L^2(\mathbb{R}^n)$ ,*

*c) il generatore infinitesimale del semigruppo è $\frac{1}{2}\,\Delta$ .*

**Proposizione 1.5.7.** *Il semigruppo di Ornstein-Uhlenbeck $n$-dimensionale $(T_t)_{t\geq 0}$ gode delle seguenti proprietà:*

*a) $(T_t)_{t\geq 0}$ è un semigruppo di contrazioni su $L^p(\gamma_n)$ per $1 \leq p \leq +\infty$ ,*

*b) ogni $T_t$ è un operatore simmetrico in $L^2(\gamma_n)$ ,*

*c) il generatore infinitesimale del semigruppo è $-(Lf)(\mathbf{x}) = \Delta f(\mathbf{x}) - \mathbf{x}.\nabla f(\mathbf{x})$ .*

Dimostreremo una dopo l'altra le tre proprietà, considerando insieme il semigruppo di Wiener e quello di O.U.; per semplicità di notazioni ci limitiamo al caso $n = 1$ ma è facile verificare che con le stesse idee e senza difficoltà si tratta il caso a dimensione $n$ .

**Proprietà a)**: con *contrazione* intendiamo dire che si ha $\|P_t f\|_p \leq \|f\|_p$ . Il caso $p = +\infty$ è evidente in entrambe le situazioni, e non lo riportiamo.

Per quanto riguarda il semigruppo di Wiener, cominciamo a osservare che si può scrivere $P_t f$ come una *convoluzione*, più precisamente $\big(P_t f\big)(x) = \big(f * \rho_t\big)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\rho_t(y)\mathrm{d}y$ , essendo $\rho_t(y) = \dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi.t}}$ .

Poichè $\rho_t(.)$ è una densità di probabilità, si ha per $1 \leq p < +\infty$

$$\|P_t f\|_p^p = \int \mathrm{d}x \Big| \int f(x-y)\rho_t(y)\mathrm{d}y \Big|^p \leq \int \mathrm{d}x \int \big|f(x-y)\big|^p \rho_t(y)\mathrm{d}y =$$

$$= \int \rho_t(y)\mathrm{d}y \int \big|f(x-y)\big|^p \mathrm{d}x = \|f\|_p^p$$

Nel caso di O.U. i conti sono simili (con $X$ e $Y$ indichiamo due v.a. gaussiane $N(0,1)$ indipendenti):

$$\int \Big|T_t f(x)\Big|^p \gamma_1(\mathrm{d}x) = \int \gamma_1(\mathrm{d}x) \Big| \int f\big(x\mathrm{e}^{-t} + \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}\, y\big)\gamma_1(\mathrm{d}y)\Big|^p \leq$$

$$\leq \int \gamma_1(\mathrm{d}x) \int \Big|f\big(x\mathrm{e}^{-t}+\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}\, y\big)\Big|^p \gamma_1(\mathrm{d}y) = \mathbf{E}\Big[\Big|f\big(X\mathrm{e}^{-t}+\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}\, Y\big)\Big|^p\Big] =$$

$$= \mathbf{E}\Big[\Big|f(X)\Big|^p\Big] = \int \big|f(x)\big|^p \gamma_1(\mathrm{d}x)$$

Per quanto riguarda la penultima eguaglianza, osserviamo che le v.a. $X$ e $\big(X\mathrm{e}^{-t}+\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}\, Y\big)$ sono equidistribuite (entrambe sono gaussiane $N(0,1)$ ).

**Proprietà b)**: col termine *simmetrico* intendiamo dire che si ha, per ogni $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ , $\big(P_t f\big|g\big)_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \big(f\big|P_t g\big)_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ .

Il caso del semigruppo di Wiener è quasi ovvio, poichè $P_t$ è l'operatore di convoluzione con un nucleo che è una funzione pari. Si ha pertanto

$$\big(P_t f\big|g\big)_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int \mathrm{d}x\, g(x) \int f(x-y)\rho_t(y)\mathrm{d}y = \int \mathrm{d}x\, g(x) \int f(z)\rho_t(x-z)\,\mathrm{d}z =$$

$$= \int \mathrm{d}z\, f(z) \int \rho_t(z-x) g(x)\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}z\, f(z) \int g(z-u)\rho_t(u)\mathrm{d}u = \big(f\big|P_t g\big)_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

Per quanto riguarda il semigruppo di O.U., si ha

$$\big(T_t f\big|g\big)_{L^2(\gamma_1)} = \int (T_t f)(x)\, g(x)\, \gamma_1(\mathrm{d}x) =$$

$$= \int\int g(x) f\big(\mathrm{e}^{-t}x+\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}\, y\big)\, \gamma_1(\mathrm{d}x)\gamma_1(\mathrm{d}y) = \mathbf{E}\Big[g(X) f\big(\mathrm{e}^{-t}X+\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}\, Y\big)\Big]$$

In modo analogo, $\big(f\big|T_t g\big)_{L^2(\gamma_1)} = \mathbf{E}\Big[f(X) g\big(\mathrm{e}^{-t}X + \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}\, Y\big)\Big]$

L'eguaglianza tra i due termini è dovuta al fatto che le le v.a. doppie $\big(X\,,\, \mathrm{e}^{-t}X + \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}\, Y\big)$ e $\big(\mathrm{e}^{-t}X + \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}\, Y\,,\, X\big)$ sono equidistribuite (poiché si tratta di v.a. gaussiane centrate, è sufficiente provare che la matrice delle covarianze è identica).

**Proprietà c)**: vediamo prima il caso del semigruppo di Wiener, ricordando che $\big(P_t f\big)(x) = \mathbf{E}\big[f\big(x+W_t\big)\big]$ . Se $f$ è derivabile due volte, con derivate prima e seconda limitate, si ha $f\big(x+W_t\big) = f(x) + \int_0^t f'(x+W_s)\,\mathrm{d}W_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(x+W_s)\,\mathrm{d}s$ .

Pertanto, poichè il valore atteso dell'integrale stocastico è 0, si ha $\dfrac{(P_t f - f)(x)}{t} = \dfrac{1}{2t}\displaystyle\int_0^t \mathbf{E}[f''(x+W_s)]\mathrm{d}s\,.$

A questo punto è un facile esercizio provare che $\displaystyle\lim_{t\to 0+}\frac{P_t f - f}{t} = \frac{1}{2}f''$ rispetto alla convergenza puntuale, inoltre la convergenza è *uniforme* ad esempio se $f''$ è uniformemente continua.

Per quanto riguarda il semigruppo di O.U., ricordiamo che si può scrivere $\big(T_t f\big)(x) = \mathbf{E}\big[f\big(X_t^x\big)\big]$, dove $X_t^x$ è la soluzione dell'equazione 1.5.1. Applicando la formula di Ito, se $f$ è derivabile due volte, si ha

$$f\big(X_t^x\big) = f(x) + \int_0^t f'(X_s^x)\Big(-X_s^x\,\mathrm{d}s + \sqrt{2}\,\mathrm{d}W_s\Big) + \int_0^t f''\big(X_s^x\big)\mathrm{d}s$$

e, in modo simile a quanto fatto precedentemente, si trova

$$\frac{\big(T_t f - f\big)(x)}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t \mathbf{E}\big[-X_s^x\,f'(X_s^x) + f''(X_s^x)\big]\,\mathrm{d}s$$

Si ha pertanto $\displaystyle\lim_{t\to 0+}\frac{(T_t f - f)(x)}{t} = -xf'(x) + f''(x)$ sotto opportune condizioni di regolarità: si può provare per esercizio ad esempio che la convergenza è uniforme se $f'$ e $f''$ sono limitate e uniformemente continue, e $xf'(x)$ è limitata.

**Esercizio 1.5.8.** Se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < +\infty$, $\lim_{t\to 0+}\|P_t f - f\|_p = 0$. Analoga proprietà vale per il semigruppo di O.U. se $f \in L^p(\gamma_n)$.

*Suggerimento:* se $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$, $P_t f$ converge ad $f$ *uniformemente*. Si sfrutta poi il fatto che $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$ è denso in $L^p(\mathbb{R}^n)$ e che $(P_t)$ è un semigruppo di contrazioni.

Esaminiamo ora più in dettaglio il legame tra semigruppo di Ornstein-Uhlenbeck e polinomi di Hermite: per essere più precisi chiamiamo $\big(T_t^{(n)}\big)_{t\ge 0}$ il semigruppo di O.U. su $\mathbb{R}^n$. Ricordiamo che l'operatore di Malliavin su $L^2(\gamma_n)$ (indicato anche qui $L^{(n)}$ per mettere in evidenza la dimensione) ammette la rappresentazione spettrale

$$L^{(n)} = \sum_{k=1}^{+\infty} k\,P_k^{(n)}$$

dove $P_k^{(n)}$ è la proiezione ortogonale sull'autospazio relativo all'autovalore $k$ (che è generato dai polinomi di Hermite $H_{\boldsymbol{\alpha}}(.)$ con $|\boldsymbol{\alpha}| = k$).

**Teorema 1.5.9.** *Vale la rappresentazione*

$$T_t^{(n)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-kt} P_k^{(n)}$$

*Dimostrazione.* Anche qui, per semplicità di notazioni, ci limitiamo al caso $n = 1$, ma la dimostrazione vale esattamente con le stesse idee per $n$ intero qualsiasi.

Osserviamo che, qualunque sia $s \in \mathbb{R}$, si ha $\int_{\mathbb{R}} \exp\left(sx - \frac{s^2}{2}\right) \gamma_1(\mathrm{d}x) = 1$. Consideriamo allora la funzione $f(x) = \exp\left(ux - \frac{u^2}{2}\right)$ e calcoliamo

$$\left(T_t^{(1)} f\right)(x) = \int_{\mathbb{R}} f\left(\mathrm{e}^{-t}x + \sqrt{1 - \mathrm{e}^{-2t}}\, y\right)\gamma_1(\mathrm{d}y) =$$

$$= \exp\left(\mathrm{e}^{-t}ux - \frac{u^2\mathrm{e}^{-2t}}{2}\right) \int_{\mathbb{R}} \exp\left(u\sqrt{1 - \mathrm{e}^{-2t}}\, y - \frac{u^2(1 - \mathrm{e}^{-2t})}{2}\right)\gamma_1(\mathrm{d}y) =$$

$$= \exp\left(\mathrm{e}^{-t}ux - \frac{u^2\mathrm{e}^{-2t}}{2}\right)$$

Ricordando l'identità (vedi 1.3.2) $\exp\left(ux - \dfrac{u^2}{2}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{u^k}{k!} H_k(x)$, si ha da una parte

$$T_t^{(1)}\Big(\sum_{k\geq 0} \frac{u^k}{k!} H_k(.)\Big) = \sum_{k\geq 0} \frac{\mathrm{e}^{-kt}u^k}{k!} H_k(.)$$

e dall'altra

$$T_t^{(1)}\Big(\sum_{k\geq 0} \frac{u^k}{k!} H_k(.)\Big) = \sum_{k\geq 0} \frac{u^k}{k!} T_t^{(1)}\big(H_k(.)\big)$$

Poiché le due serie coincidono per ogni $u \in \mathbb{R}$, si ha per ogni intero $k$
$T_t^{(1)}\big(H_k(.)\big) = \mathrm{e}^{-kt}H_k(.)$. □

Vediamo ora una caratterizzazione delle funzioni a *variazione limitata*, dovuta a De Giorgi, ottenuta attraverso il semigruppo di transizione del processo di Wiener.

Cominciamo a ricordare che, presa una funzione $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a *variazione limitata* e continua a destra, esiste una misura con segno *Du di Radon* (cioè finita su ogni compatto) tale si abbia, per ogni $a < b$, $\big(Du\big)(]a, b]) = u(b) - u(a)$. Presa $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})$ ($\mathcal{C}^1$ a supporto compatto) si ha

$$\int_{\mathbb{R}} u(x)\, \varphi'(x)\, \mathrm{d}x = - \int_r \varphi(x) \,\big(Du\big)(\mathrm{d}x)$$

ed inoltre la *variazione* di $u$ coincide con

$$\sup\Big\{\int_{\mathbb{R}} u(x)\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x\,\Big|\,\varphi\in\mathcal{C}^1_c(\mathbb{R})\,,\ \|\varphi\|_\infty\le 1\Big\}$$

Una definizione delle funzioni a variazione limitata definite su $\mathbb{R}^n$ diventa piuttosto *pesante*, ed è più agevole definire le funzioni B.V. definite su $\mathbb{R}^n$ nel modo seguente

**Definizione 1.5.10.** La funzione $u\in L^1(\mathbb{R}^n)$ è detta a **variazione limitata** se, per ogni $i$, esiste una misura con segno di Radon $D_i u$ tale che si abbia, per ogni $\varphi\in\mathcal{C}^1_c(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x})\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} \;=\; -\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(\mathbf{x})\big(D_i u\big)(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

(cioè $D_i u$ è la derivata parziale di $u$ nel senso delle distribuzioni). Inoltre la variazione di $u$ è per definizione la variazione della misura vettoriale $Du = \big(D_1 u,\dots,D_n u\big)$ e si ha

$$\|u\|_{BV} \;=\; \sup\Big\{\int_{\mathbb{R}^n} u\,(\mathrm{div}\boldsymbol{\varphi})\mathrm{d}\mathbf{x}\,\Big|\,\boldsymbol{\varphi}=(\varphi_1,\dots,\varphi_n)\in\mathcal{C}^1_c(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)\,,\ \|\boldsymbol{\varphi}\|_\infty\le 1\Big\}$$

Prendiamo $f\in L^1(\mathbb{R})$ e notiamo che $P_t f$ è derivabile, inoltre se $f$ è derivabile e $f'\in L^1$ si ha $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(P_t f) = P_t(f')$: queste due proprietà sono una facile conseguenza del fatto che si può scrivere

$$\big(P_t f\big)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\rho_t(y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}}\rho_t(x-y)f(y)\mathrm{d}y$$

Se $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ si ha $\nabla\big(P_t f\big) = P_t\big(\nabla f\big)$ e $\nabla\big(P_{t+s}f\big) = \nabla\big(P_t P_s f\big) = P_t\big(\nabla P_s f\big)$.

Poiché $P_t$ è una contrazione su $L^1(\mathbb{R}^n)$, la funzione $t\to\int_{\mathbb{R}^n}\big|\nabla P_t f\big|\mathrm{d}\mathbf{x}$ è *decrescente*: definiamo allora, per $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$I(f) = \lim_{t\to 0+}\int_{\mathbb{R}^n}\big|\nabla P_t f\big|\mathrm{d}\mathbf{x} = \sup_{t\ge 0}\int_{\mathbb{R}^n}\big|\nabla P_t f\big|\mathrm{d}\mathbf{x}$$

Il risultato che segue è dovuto a **De Giorgi**

**Teorema 1.5.11.** *Presa $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$, questa è a variazione limita se e solo se $I(f)<+\infty$: in tal caso vale l'eguaglianza $\|f\|_{BV} = I(f)$.*

Prima di dare la dimostrazione di questo risultato, giustifichiamolo intuitivamente: se $f$ è di classe $\mathcal{C}^1$ e $\nabla f\in L^1(\mathbb{R}^n)$, si ha $\|f\|_{BV} = \int|\nabla f|\,\mathrm{d}\mathbf{x}$, e tenendo conto dell'esercizio 1.5.8 si ha $\|f\|_{BV} = \lim_{t\to 0+}\int\big|P_t(\nabla f)\big|\mathrm{d}\mathbf{x}$.

*Dimostrazione.* Supponiamo che $f$ sia a variazione limitata: per ogni $i$ si ha

$$\big(\frac{\partial}{\partial x_i} P_t f\big)(\mathbf{x}) = \int \frac{\partial}{\partial x_i} \rho_t(\mathbf{x}-\mathbf{y}) f(\mathbf{y}) \mathrm{d}\mathbf{y} = -\int \frac{\partial}{\partial y_i} \rho_t(\mathbf{x}-\mathbf{y}) f(\mathbf{y}) \mathrm{d}\mathbf{y} =$$

$$= \int \rho_t(\mathbf{x}-\mathbf{y})(D_i f)(\mathrm{d}\mathbf{y})$$

e, passando alla notazione vettoriale e indicando con $|Df|$ la variazione della misura vettoriale $(Df)$, si ha $\nabla\big(P_t f\big)(\mathbf{x}) = \int \rho_t(\mathbf{x}-\mathbf{y})(Df)(\mathrm{d}\mathbf{y})$. Quindi

$$\int \big|\nabla P_t f\big|(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x} \leq \int \mathrm{d}\mathbf{x} \int \rho_t(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \big|Df\big|(\mathrm{d}\mathbf{y}) =$$

$$= \int \big|Df\big|(\mathrm{d}\mathbf{y}) \int \rho_t(\mathbf{x}-\mathbf{y})\, \mathrm{d}\mathbf{x} = \int \big|Df\big|(\mathrm{d}\mathbf{y}) = \|f\|_{BV}$$

Supponiamo viceversa che si abbia $I(f) < +\infty$: prendiamo una successione $t_n \downarrow 0$ e consideriamo la successione di misure vettoriali $m_n = \nabla(P_{t_n} f).\mathrm{d}\mathbf{x}$ (cioè aventi densità $\nabla(P_{t_n} f)$ rispetto alla misura di Lebesgue $n$-dimensionale). Queste misure sono equilimitate in variazione (quindi relativamente compatte per la topologia della convergenza debole) e pertanto (modulo passaggio ad una sottosuccessione) esiste una misura vettoriale $Df = (D_1 f, \dots, D_n f)$ tale che la successione $m_n$ converga debolmente a $Df$: si tratta ora di provare che $Df$ è il gradiente di $f$ (nel senso delle distribuzioni).

Presa $\varphi \in \mathcal{C}^1_c(\mathbb{R}^n)$ si ha

$$\int f \,\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, \mathrm{d}\mathbf{x} = \lim_{n\to\infty} \int \big(P_{t_n} f\big) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, \mathrm{d}\mathbf{x} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} -\int \varphi\, \frac{\partial}{\partial x_i} \big(P_{t_n} f\big) \mathrm{d}\mathbf{x} = -\int \varphi(\mathbf{x}) \big(D_i f\big)(\mathrm{d}\mathbf{x})$$

Inoltre, presa $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in C^1_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ con $\|\boldsymbol{\varphi}\|_\infty \leq 1$, si ha

$$\int f \big(\mathrm{div}\, \boldsymbol{\varphi}\big)\, \mathrm{d}\mathbf{x} = \lim_{n\to\infty} \int \big(P_{t_n} f\big) \mathrm{div} \boldsymbol{\varphi}\, \mathrm{d}\mathbf{x} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int -\nabla(P_t f).\boldsymbol{\varphi}\, \mathrm{d}\mathbf{x} \leq I(f)$$

□

# Capitolo 2

# Calcolo di Malliavin sullo spazio di Wiener.

## 2.1 Lo spazio di Wiener.

Cominciamo con la costruzione dello *spazio canonico di Wiener*: supponiamo assegnato, su un generico $\big(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{\mathbf{P}}\big)$, un processo di Wiener $(\widetilde{W}_t)_{0\leq t\leq T}$ *con traiettorie continue.*

Sia ora $\Omega = \mathcal{C}_0(0,T)$ lo spazio di Banach delle funzioni continue a valori reali, definite sull'intervallo $[0,T]$ e *nulle in 0* (con la norma della convergenza uniforme): su $\Omega$ coincidono la $\sigma$-algebre di Borel (cioè quella generata dagli aperti, o equivalentemente dai chiusi) e quella generata dalle *proiezioni canoniche* $W_t(\omega) = \omega(t)$. Infatti da una parte le proiezioni canoniche sono funzioni continue su $\Omega$ (e quindi la $\sigma$-algebra di Borel contiene quella generata dalle proiezioni canoniche), dall'altra si può scrivere ad esempio la sfera chiusa di centro $\omega$ e raggio $\delta$ (indicata $S(\omega,\delta)$ ) nel modo seguente

$$S(\omega,\delta) = \bigcap_{t\in\mathbb{Q}\,,\,0<t<T} \big\{\omega' \in \Omega \,\big|\, |W_t(\omega) - W_t(\omega')| \leq \delta\big\}$$

Indicata con $\mathcal{F}$ questa $\sigma$-algebra, consideriamo l'applicazione $\widetilde{\mathbf{W}} : \widetilde{\Omega} \longrightarrow \Omega$ che manda il punto $\tilde{\omega} \in \widetilde{\Omega}$ nella *traiettoria* $t \to \widetilde{W}_t(\tilde{\omega})$. Questa applicazione è misurabile poiché è misurabile la composizione con ognuna delle priezioni canoniche: si ha infatti $W_t \circ \widetilde{\mathbf{W}}(\tilde{\omega}) = \widetilde{W}_t(\tilde{\omega})$. L'immagine della probabilità $\widetilde{\mathbf{P}}$ mediante l'applicazione $\widetilde{\mathbf{W}}$ è la *legge di probabilità* del processo di Wiener ed è chiamata la *misura di Wiener*: indichiamo con $\mathbf{P}$ questa probabilità.

È facile verificare che sullo spazio $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ il processo stocastico formato dalle proiezioni canoniche è un processo di Wiener: chiamiamo questo *processo di Wiener canonico.*

Come si è visto, costruire un processo di Wiener (con traiettorie continue) equivale a costruire la misura di Wiener sullo spazio $\mathcal{C}_0(0,T)$ .

In questo capitolo la notazione $L^2(\Omega)$ indica $L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$ dove $\Omega = C_0(0,T)$ e $\mathbf{P}$ è la misura di Wiener.

Con $(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$ si indica poi la *filtrazione* generata da $(W_t)_{0\le t\le T}$ (cioè $\mathcal{F}_t = \sigma\big\{W_s \,\big|\, s\le t\big\}$) (modificata in modo da soddisfare le cosiddette *ipotesi abituali*).

**Definizione 2.1.1.** Si chiama **spazio di Cameron-Martin** il sottospazio di $C_0(0,T)$ formato dalle funzioni $h^*$ della forma $h^*(t) = \int_0^t h(s)\mathrm{d}s$ con $h \in L^2(0,T)$ : munito della norma $\|h\|_{L^2(0,T)}$ , questo è uno spazio di Banach.

Con $L^2(0,T)$ indichiamo sinteticamente lo spazio $L^2$ sull'intervallo $[0,T]$ munito della misura di Lebesgue. Lo spazio di Cameron–Martin (indicato $CM$) non è altro che lo spazio $H^1_0(0,T)$ delle funzioni derivabili (in senso debole) con derivata in $L^2$ e nulle in 0: è immediato constatare che $CM$ è un sottospazio denso di $C_0(0,T)$ e trascurabile per la misura di Wiener (infatti le traiettorie del processo di Wiener non sono a variazione finita).

Il risultato seguente è una conseguenza del **teorema di Girsanov**:

**Teorema 2.1.2.** *Il supporto della misura di Wiener è tutto* $C_0(0,T)$ *.*

*Dimostrazione.* Osserviamo preliminarmente che un punto $\omega$ appartiene al supporto di $\mathbf{P}$ se ogni suo intorno è non trascurabile: prendiamo dunque un punto $\omega$ che appartiene a questo supporto (almeno uno ne esiste), e consideriamo un altro punto $w$ in $\Omega$ .

Dato $a > 0$ , esiste $h^* \in CM$ tale che si abbia $\|h^* - (w-\omega)\|_\infty \le a/2$ e di conseguenza, passando agli intorni sferici, si ha

$$S\big(\omega, \frac{a}{2}\big) + h^* \subseteq S\big(w, a\big)$$

$S(\omega, a/2)$ non è trascurabile e di conseguenza (per il teorema di Girsanov) $S(\omega,a/2)+h^*$ non è trascurabile: ne segue che $S(w,a)$ è non trascurabile. □

La definizione formale di derivata secondo Malliavin verrà data nel paragrafo successivo: diamo qui una presentazione intuitiva. Ricordiamo che, se $X$, $Y$ sono due spazi di Banach e $f : X \to Y$ , $f$ si dice *derivabile secondo Gateaux* nel punto $x$ se esiste $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ tale che si abbia, per ogni $h \in X$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x+th) - f(x) - t\,Ah}{t} = 0$$

Invece $f$ si dice *derivabile secondo Fréchet* (sempre nel punto $x$) se esiste $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ tale che si abbia

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - Ah}{\|h\|} = 0$$

La *derivata di Malliavin* è in un certo senso una derivata nel senso di Gateaux però non secondo tutte le direzioni, ma solo lungo le direzioni dello spazio di Cameron-Martin.

Cominciamo con una **definizione provvisoria**: chiamiamo *funzionale* un elemento $F \in L^2(\Omega)$, e diciamo che $F$ è derivabile secondo Malliavin se esiste un elemento $Z_s(\omega) \in L^2\big(\Omega, L^2(0,T)\big) \cong L^2\big(\Omega \times [0,T]\big)$ tale che si abbia, per ogni $h \in L^2(0,T)$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(\omega + \varepsilon h^*) - F(\omega)}{\varepsilon} = \int_0^T Z_s(\omega)\, h(s)\, \mathrm{d}s$$

Prendiamo $k \in L^2(0,T)$ e consideriamo l'integrale di Wiener $W(k)(\omega) = \big(\int_0^T k(s)\, \mathrm{d}W_s\big)(\omega)$ : poiché $W(k)(\omega + \varepsilon h^*) = W(k)(\omega) + \varepsilon \int_0^t h(s) k(s)\, \mathrm{d}s$ , si verifica facilmente che la derivata secondo la definizione provvisoria sopra scritta è $Z_t(\omega) = W(k)(\omega).k(t)$ .

## 2.2 La derivata di Malliavin e le sue proprietà.

Cominciamo con una definizione:

**Definizione 2.2.1 (Funzioni lisce).** Si chiamano funzioni lisce i funzionali $F : \Omega \to \mathbb{R}$ della forma

$$F = \varphi\big(W(h_1), \ldots, W(h_n)\big)$$

dove $h_1, \ldots, h_n$ sono elementi di $L^2(0,T)$ e $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ è tale che tutte le sue derivate sono a crescita al più esponenziale.

Più precisamente, per ogni multiindice $\boldsymbol{\alpha}$ esistono due costanti positive $C_\alpha$ e $c_\alpha$ tali che si abbia $\big|\partial_{\boldsymbol{\alpha}} \varphi(\mathbf{x})\big| \leq C_\alpha \exp\big(c_\alpha |\mathbf{x}|\big)$ . Notiamo che, poichè la legge di $W(h_1), \ldots, W(h_n)$ è gaussiana $n$–dimensionale, le funzioni lisce appartengono a $L^2(\Omega)$ (anzi appartengono a $\bigcap_{p<+\infty} L^p(\Omega)$ ), inoltre le funzioni lisce sono dense in $L^2(\Omega)$ .

Infatti ad esempio gli esponenziali di Wiener $\boldsymbol{\varepsilon}(h) = \exp\big(W(h) - \frac{\|h\|^2}{2}\big)$ (e le loro combinazioni lineari, chiamate i *polinomi esponenziali*) sono funzioni lisce, ed è noto che gli esponenziali di Wiener formano un insieme *totale* in $L^2(\Omega)$ . Indichiamo con $\mathcal{L}$ lo spazio delle funzioni lisce.

**Definizione 2.2.2 (Derivata di Malliavin).** Definiamo l'operatore $D : \mathcal{L} \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega \times [0,T])$ nel modo seguente: se $F = \varphi\big(W(h_1),\dots,W(h_n)\big)$ si pone

$$D_t F(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\big(W(h_1),\dots,W(h_n)\big)(\omega).h_i(t)$$

e, se $h \in L^2(0,T)$ , $D_h F = \int_0^T D_s F\, h(s)\, \mathrm{d}s$ .

**Proposizione 2.2.3 (Formula di integrazione per parti di Gaveaux–Trauber).** *Siano $F, G \in \mathcal{L}$ ed $h \in L^2(0,T)$ : vale la formula*

$$\mathbf{E}\Big[D_h F\,.G\Big] = \mathbf{E}\big[-F D_h G + FG.W(h)\big]$$

*Dimostrazione.* Possiamo supporre che $F$ e $G$ si scrivano a partire dalle stesse funzioni $h_1,\dots,h_n$, che queste siano *ortonormali* in $L^2(0,T)$ e che $h = \sum_{i=1}^n a_i h_i$ . Poiché la legge di $\big(W(h_1),\dots,W(h_n)\big)$ è la legge $\gamma_n$ , la dimostrazione si riconduce a quanto si è già visto in 1.2.2.

Infatti se $F = \varphi\big(W(h_1),\dots,W(h_n)\big)$ e $G = \psi\big(W(h_1),\dots,W(h_n)\big)$, si ha $\mathbf{E}\Big[D_h F.G\Big] = \mathbf{E}\big[\big(D_{\mathbf{a}}\varphi\big)\big(W(h_1),\dots,W(h_n)\big)\psi\big(W(h_1),\dots,W(h_n)\big)\big] =$ $= \int_{\mathbb{R}^n} (D_{\mathbf{a}}\varphi)\,\psi\, \mathrm{d}\gamma_n$

Questo integrale è eguale a $\int_{\mathbb{R}^n} \big[-\varphi(D_{\mathbf{a}}\psi) + \varphi\,\psi\,\mathbf{x}.\mathbf{a}\big]\mathrm{d}\gamma_n$ , ed è facile riconoscere che questo è eguale a $\mathbf{E}\big[-F D_h G + FG.W(h)\big]$ (notare che $W(h) = \sum_{i=1}^n a_i W(h_i)$ ). □

**Osservazione 2.2.4.** La formula 2.2.3 è una conseguenza di queste due formule:

$$D_h(FG) = (D_h F)G + F D_h G \qquad , \qquad \mathbf{E}[D_h F] = \mathbf{E}[F.W(h)]$$

Ricordiamo che un operatore lineare $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to Y$ è detto **chiuso** se il suo grafico è chiuso, cioè se vale questa proprietà:

$$\text{se } x_n \in \mathcal{D}(A)\,,\ x_n \to x \text{ e } y_n = Ax_n \to y \text{ , allora } x \in \mathcal{D}(A) \text{ e } Ax = y$$

Un operatore è detto **chiudibile** se ammette un prolungamento chiuso, e si può verificare che un operatore è chiudibile se verifica questa proprietà:

$$\text{se } x_n \in \mathcal{D}(A)\,,\ x_n \to 0 \text{ e } y_n = Ax_n \to y \text{ , allora } y = 0$$

Quando $A$ è chiudibile, chiameremo *chiusura* di $A$ la minima estensione chiusa, cioè l'operatore il cui grafico coincide con la chiusura del grafico di $A$.

Una conseguenza della formula di integrazione per parti è il seguente

**Corollario 2.2.5.** *L'operatore $D : \mathcal{L} \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega \times [0,T])$ è chiudibile*

*Dimostrazione.* Supponiamo che $F_n \to 0$ in $L^2(\Omega)$ e che $DF_n \to Z$ in $L^2(\Omega \times [0,T])$: dobbiamo provare che si ha, per ogni $Y \in L^2(\Omega \times [0,T])$ $\int\int_{\Omega\times[0,T]} Z(\omega,s)Y(\omega,s)\,\mathrm{d}\mathbf{P}(\omega)\,\mathrm{d}s = 0$, ed è sufficiente verificarlo se $Y(\omega,s) = G(\omega)h(s)$ con $G \in \mathcal{L}$ e $h \in L^2(0,T)$.

$$\int\int_{\Omega\times[0,T]} Z(\omega,s)G(\omega)h(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\mathbf{P}(\omega) = \lim_{n\to\infty}\int\int D_sF_n(\omega)h(s)G(\omega)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\mathbf{P}(\omega) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\mathbf{E}\big[(D_hF_n)G\big] = \lim_{n\to\infty}\Big(-\mathbf{E}\big[F_n\,D_hG\big] + \mathbf{E}\big[F_n\,G\,W(h)\big]\Big) = 0$$

□

D'ora innanzi consideriamo la **chiusura** dell'operatore $D$ (e continuiamo a indicarla $D$) e $\mathbb{D}^{1,2}$ il suo dominio: $\mathbb{D}^{1,2}$ è la chiusura di $\mathcal{L}$ rispetto alla norma

$$\Big(\int_\Omega F^2\,\mathrm{d}\mathbf{P} + \int_\Omega \mathrm{d}\mathbf{P}\int_{[0,T]}(D_sF)^2\,\mathrm{d}s\Big)^{1/2}$$

Di conseguenza $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ se esiste una successione $(F_n)_{n\geq 1}$ di elementi di $\mathcal{L}$ tale che $F_n \to F$ in $L^2(\Omega)$ e $(DF_n)_{n\geq1}$ è di Cauchy in $L^2(\Omega\times[0,T])$: si ha $DF = \lim_{n\to\infty} DF_n$.

In modo analogo, $\mathbb{D}^{1,p}$ è la chiusura di $\mathcal{L}$ rispetto alla norma

$$\Big(\int_\Omega |F|^p\,\mathrm{d}\mathbf{P} + \int_\Omega\big(\int_{[0,T]}(D_sF)^2\mathrm{d}s\big)^{p/2}\mathrm{d}\mathbf{P}\Big)^{1/p}$$

Si noti che questa è la norma in $L^p(\Omega)$ di $F$ e di $DF$ visto, in funzione di $\omega$, come elemento di $L^2(0,T)$.

**Proposizione 2.2.6 (Regola della catena).** *Siano $F_1,\dots,F_n$ elementi di $\mathbb{D}^{1,2}$ e sia $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ con derivate prime limitate: $\varphi(F_1,\dots,F_n) \in \mathbb{D}^{1,2}$ e si ha*

$$D_s\,\varphi\big(F_1,\dots,F_n\big) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(F_1,\dots,F_n).D_sF_i$$

Questa proprietà è immediata se $F_1,\dots,F_n$ sono lisce e $\varphi \in C^\infty$, e poi si estende per continuità.

**Proposizione 2.2.7.** *Sia $(F_n)_{n\geq1}$ una successione di elementi di $\mathbb{D}^{1,2}$ e supponiamo che $F_n \to F$ in $L^2(\Omega)$ e che la successione $(DF_n)_{n\geq1}$ sia limitata in $L^2(\Omega\times[0,T])$: allora $F \in \mathbb{D}^{1,2}$.*

*Dimostrazione.* Poiché $\mathbb{D}^{1,2}$ è uno spazio di Hilbert, una successione limitata è debolmente relativamente compatta: esiste dunque una sottosuccessionee $\big(F_{n_k}\big)_{k\geq 1}$ convergente debolmente a $G\in\mathbb{D}^{1,2}$ : quindi $(F_{n_k})_{k\geq 1}$ converge a $G$ debolmente in $L^2(\Omega)$ e di conseguenza $G=F$ . Si noti che $(DF_{n_k})$ converge a $DF$ solo debolmente in $L^2(\Omega\times[0,T])$ . □

**Osservazione 2.2.8.** Poiché $L^p\big(\Omega, L^2(0,T)\big)$ si identifica con il duale di $L^q\big(\Omega, L^2(0,T)\big)$ se $1<p<+\infty$ e $1/p+1/q=1$ , l'enunciato della Proposizione 2.2.7 rimane vero nello spazio $\mathbb{D}^{1,p}$ per $1<p<+\infty$ .

**Teorema 2.2.9.** *Sia $F\in\mathbb{D}^{1,2}$ , $g$ lipschitziana con costante di Lipschitz $C$ : allora $g\circ F\in\mathbb{D}^{1,2}$ ed esiste $Z$ con $|Z(\omega)|\leq C$ q.c. tale che si abbia*

$$D_t\big(g\circ F\big)(\omega)=Z(\omega).D_tF(\omega)$$

*Dimostrazione.* La tesi è vera se $g\in\mathcal{C}^1_b(\mathbb{R})$ con $Z(\omega)=g'(F(\omega))$ : consideriamo (mediante regolarizzazione) una successione $(g_n)_{n\geq 1}$ di funzioni di classe $\mathcal{C}_1$ convergente uniformemente a $g$ e tali che $|g'(.)|\leq C$ .

Innanzi tutto $g_n\circ F$ converge a $g\circ F$ in $L^2(\Omega)$ ; inoltre la successione $D_t(g_n\circ F)=(g_n'\circ F)D_tF$ è limitata in $L^2(\Omega\times[0,T])$ e quindi per la Proposizione 2.2.7 $(g\circ F)\in\mathbb{D}^{1,2}$ .

Inoltre, poichè la successione $(g_n'\circ F)$ è uniformemente limitata dalla costante $C$ , è relativamente compatta per la topologia $\sigma(L^\infty,L^1)$ e quindi (modulo passaggio ad una sottosuccessione) esiste $Z\in L^\infty$ con $|Z(\omega)|\leq C$ q.c. tale che $g_n'\circ F$ converga a $Z$ per la topologia $\sigma(L^\infty,L^1)$ .

Di conseguenza $g_n'(F)D_tF\to ZD_tF$ debolmente in $L^2(\Omega\times[0,T])$ ma siccome (sempre passando a una sottosuccessione) $g_n'(F)D_tF\to D_t(g\circ F)$ debolmente, segue l'eguaglianza $D_t(g\circ F)=Z.D_tF$ . □

**Esercizio 2.2.10.** Provare che il precedente Teorema 2.2.9 è vero anche se $F\in\mathbb{D}^{1,p}$ con $1<p<+\infty$ (tenere conto dell'osservazione 2.2.8).

**Esercizio 2.2.11.** Sia $F\in\mathbb{D}^{1,2}$ e poniamo $F_n=(F\wedge n)\vee(-n)$ : provare che $F_n\in D^{1,2}$ e che $F_n\to F$ in $D^{1,2}$ .

**Esercizio 2.2.12.** [**Una caratterizzazione della derivata di Malliavin**] Provare che $F\in\mathbb{D}^{1,2}$ e $DF=Z$ se e solo se $F\in L^2(\Omega)$ ed esiste $Z\in L^2(\Omega\times[0,T])$ tali che, presa comunque $G\in\mathcal{L}$ ed $h\in L^2(0,T)$ , valga la formula

$$\mathbf{E}\Big[\Big(\int_0^T Z_s h(s)\,\mathrm{d}s\Big)G\Big]=\mathbf{E}\Big[-FD_hG+F\,G\,W(h)\Big]$$

*Suggerimento*: definiamo, sui funzionali $F$ che soddisfano l'equazione sopra scritta, l'operatore $\widetilde{D} : F \to Z$. Questo operatore è chiudibile e coincide con la derivata di Malliavin sulle funzioni lisce.

Prima di passare agli enunciati successivi, insistiamo sugli *esponenziali di Wiener* $\boldsymbol{\varepsilon}(h)$: come si è ricordato, questi formano un insieme *totale* in $L^2(\Omega)$, inoltre le loro combinazioni lineari formano un'*algebra* poiché si ha $\boldsymbol{\varepsilon}(h+k) = \boldsymbol{\varepsilon}(h)\,\boldsymbol{\varepsilon}(h).\exp\big((h|k)\big)$ (dove $(h|k)$ indica il prodotto scalare in $L^2(0,T)$).

Le combinazioni lineari di esponenziali di Wiener sono chiamate *polinomi esponenziali*: questi sono densi non solo in $L^2(\Omega)$ ma anche in $\mathbb{D}^{1,2}$ (e più in generale in $\mathbb{D}^{1,p}$ qualunque sia $1 < p < +\infty$ ).

**Proposizione 2.2.13.** *Supponiamo che $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ e che sia $\mathcal{F}_t$–misurabile: allora $D_sF$ è $\mathcal{F}_t$-misurabile e $D_sF = 0$ per $s > t$ .*

*Dimostrazione.* Consideriamo $h \in L^2(0,T)$: è immediato constatare che $\boldsymbol{\varepsilon}(h)$ è $\mathcal{F}_t$–misurabile se $h$ è nulla fuori dell'intervallo $[0,t]$ ed è indipendente da $\mathcal{F}_t$ se $h$ è nulla sull'intervallo $[0,t]$ (infatti queste proprietà sono evidenti se $h$ è costante a tratti e poi si estendono a tutto $L^2(0,T)$ ). Come conseguenza $\boldsymbol{\varepsilon}(h)$ è $\mathcal{F}_t$-misurabile se e solo se $h(s) = h(s).I_{[0,t]}(s)$ (cioè $h$ è nulla fuori dell'intervallo $[0,t]$).

Presa $h \in L^2(0,T)$, poniamo $h = h_1 + h_2$ dove $h_1(s) = h(s).I_{[0,t]}(s)$ e $h_2 = h - h_1$: si ha $\mathbf{E}\big[\boldsymbol{\varepsilon}(h)|\mathcal{F}_t\big] = \mathbf{E}\big[\boldsymbol{\varepsilon}(h_1)\boldsymbol{\varepsilon}(h_2)|\mathcal{F}_t\big] = \boldsymbol{\varepsilon}(h_1)\mathbf{E}[\boldsymbol{\varepsilon}(h_2)] = \boldsymbol{\varepsilon}(h_1)$. Di conseguenza

$$D_s\boldsymbol{\varepsilon}(h_1) = \boldsymbol{\varepsilon}(h_1).h_1(s) = \begin{cases} \mathbf{E}\big[D_s\boldsymbol{\varepsilon}(h)|\mathcal{F}_t\big] & 0 \le s \le t \\ 0 & s > t \end{cases}$$

Più in generale, se $F$ è un polinomio esponenziale, $F^* = \mathbf{E}[F|\mathcal{F}_t]$ lo è ancora e si ha

$$D_sF^* = \begin{cases} \mathbf{E}[D_sF|\mathcal{F}_t] & 0 \le s \le t \\ 0 & s > t \end{cases}$$

Consideriamo ora $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ che sia $\mathcal{F}_t$-misurabile, e sia $(F_n)_{n\ge 1}$ una successione di polinomi esponenziali tale che $F_n \to F$ in $L^2(\Omega)$ e $DF_n \to DF$ in $L^2(\Omega \times [0,T])$: poniamo $F_n^* = \mathbf{E}[F_n|\mathcal{F}_t]$.

La successione $(F_n^*)_{n\ge 1}$ converge ad $F$ in $L^2(\Omega)$ (poichè la speranza condizionale è una contrazione in $L^2(\Omega)$), inoltre

$$D_sF_n^* = \begin{cases} \mathbf{E}[D_sF_n|\mathcal{F}_t] & 0 \le s \le t \\ 0 & s > t \end{cases}$$

è di Cauchy in $L^2(\Omega \times [0,T])$ e pertanto converge a $DF$ . $\square$

## 2.3 La divergenza o integrale di Skorohod.

Nel paragrafo precedente è stato definito l'operatore $D : \mathbb{D}^{1,2} \subseteq L^2(\Omega) \to L^2(\Omega \times [0,T])$ : poichè il dominio di $D$ è denso, è definito l'operatore aggiunto $D^* : \mathcal{D}(D^*) \subseteq L^2(\Omega \times [0,T]) \to L^2(\Omega)$ .

Quindi $Z \in L^2(\Omega \times [0,T])$ appartiene al dominio di $D^*$ se l'applicazione $F \to \mathbf{E}\big[\int_0^T D_s F\, Z_s\, \mathrm{d}s\big]$ (definita su $\mathbb{D}^{1,2}$) è tale che si abbia
$\big|\mathbb{E}\big[\int_0^T D_s F\, Z_s\, \mathrm{d}s\big]\big| \le C.\|F\|_{L^2(\Omega)}$ , e in tal caso $D^*Z$ è l'unico elemento di $L^2(\Omega)$ tale che, $\forall F \in \mathbb{D}^{1,2}$

$$\langle DF\, ,\, Z\rangle_{L^2(\Omega\times[0,T])} = \mathbf{E}\Big[\int_0^T D_s F\, Z_s\, \mathrm{d}s\Big] = \mathbf{E}\big[F\, D^*(Z)\big] = \langle F\, ,\, D^*(Z)\rangle_{L^2(\Omega)}$$

Analoga è la definizione di $D^*$ su $L^p\big(\Omega, L^2(0,T)\big)$ ; è immediato verificare che $D^*$ è un operatore chiuso. L'operatore $D^*$ è chiamato **divergenza** e indicato anche $\delta$ .

Usiamo la notazione $\mathcal{M}^2$ per indicare lo spazio di Hilbert dei processi *progressivamente misurabili* $H_s$ tali che $\mathbf{E}\big[\int_0^T H_s^2\, \mathrm{d}s\big] < +\infty$ : più precisamente $\mathcal{M}^2 = L^2\big(\Omega \times [0,T]\, ,\, \mathcal{P}\, ,\, \mathbf{P} \otimes \mathrm{d}t\big)$ , dove $\mathcal{P}$ è la $\sigma$–algebra *progressiva* (cioè quella generata dai processi progressivamente misurabili), e di conseguenza $\mathcal{M}^2$ è un sottospazio chiuso di $L^2(\Omega \times [0,T])$ .

**Teorema 2.3.1** (**Divergenza e integrale di Ito).** *Supponiamo che $H \in \mathcal{M}^2$ : allora $H$ appartiene al dominio di $D^*$ e si ha $D^*(H) = \int_0^T H_s\, \mathrm{d}W_s$ .*

*Dimostrazione.* Bisogna provare che, data $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ , vale l'eguaglianza

$$\mathbf{E}\Big[\int_0^T D_s F\, H_s\, \mathrm{d}s\Big] = \mathbf{E}\Big[F. \int_0^T H_s\, \mathrm{d}W_s\Big]$$

ed è sufficiente verificare questa formula se $F = \boldsymbol{\varepsilon}(h)$ è un esponenziale di Wiener (perché le loro combinazioni lineari sono dense in $\mathbb{D}^{1,2}$ ).

L'eguaglianza

$$\mathbf{E}\Big[\boldsymbol{\varepsilon}(h) \int_0^T h(s) H_s\, \mathrm{d}s\Big] = \mathbf{E}\Big[\boldsymbol{\varepsilon}(h) \int_0^T H_s\, \mathrm{d}W_s\Big]$$

equivale a

$$\mathbf{E}\Big[\boldsymbol{\varepsilon}(h) \int_0^T H_s\big(\mathrm{d}W_s - h(s)\mathrm{d}s\big)\Big] = 0$$

Per il teorema di Girsanov, sotto la probabilità $\mathbf{P}^*$ che ha densità $\boldsymbol{\varepsilon}(h)$ rispetto a $\mathbf{P}$, $W_t^* = W_t - \int_0^t h(s)\, \mathrm{d}s$ è un processo di Wiener e quindi l'ultima eguaglianza è verificata se $\int\int_{\Omega\times[0,T]} H_s^2\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}\mathbf{P}^* < +\infty$ , e poi si estende ovviamente ai processi $H \in \mathcal{M}^2$ . $\square$

Per la divergenza di $Z$ (se è definita) vengono usate indifferentemente le notazioni $D^*(Z)$, $\delta(Z)$ ed anche $\int_0^T Z_s\,\delta W_s$.

Inoltre la divergenza è anche chiamata **integrale di Skorohod**: in verità Skorohod ha definito il suo integrale come estensione dell'integrale di Ito ai processi non adattati e più tardi ci si è accorti che questo coincideva con l'operatore aggiunto della derivata di Malliavin.

È bene però ribadire che l'integrale di Skorohod *non è un vero integrale* (cioè non è *"limite delle somme di Riemann"*) come appare evidente dal risultato seguente.

**Teorema 2.3.2.** *Siano dati $F \in \mathbb{D}^{1,2}$, $Z$ appartenente al dominio di $\delta$ e supponiamo che si abbia*

$$\mathbf{E}\Big[F^2\Big(\int_0^T Z_s\,\delta W_s\Big)^2 + \Big(\int_0^T D_sF\,Z_s\,\mathrm{d}s\Big)^2\Big] < +\infty \ :$$

*allora $(FZ_s)$ appartiene al dominio di $\delta$ e si ha*

$$\int_0^T \big(FZ_s\big)\delta W_s = F\int_0^T Z_s\,\delta W_s - \int_0^T D_sF\,Z_s\,\mathrm{d}s$$

In particolare, se $H$ è progressivamente misurabile, la formula sopra scritta diventa

$$\int_0^T \big(FH_s\big)\delta W_s = F\int_0^T H_s\,\mathrm{d}W_s - \int_0^T D_sF\,H_s\,\mathrm{d}s$$

*Dimostrazione.* Ci limitiamo a provare la formula supponendo che $F$ sia liscia, ed è poi evidente l'estensione al caso in cui $F$ verifica le condizioni sopra scritte. Presa $G$ liscia, si ha

$$\langle DG\,,\,FZ_s\rangle_{L^2(\Omega\times[0,T])} = \langle F\,DG\,,\,Z_s\rangle_{L^2(\Omega\times[0,T])} =$$

$$= \langle D(FG) - G\,DF\,,\,Z_s\rangle_{L^2(\Omega\times[0,T])} = \langle FG\,,\,\delta(Z)\rangle_{L^2(\Omega)} - \langle DF\,,\,GZ\rangle_{L^2(\Omega\times[0,T])} =$$

$$= \mathbf{E}\Big[G\Big(F\int_0^T Z_s\,\delta W_s - \int_0^T D_sF\,Z_s\,\mathrm{d}s\Big)\Big]$$

e questo completa la dimostrazione. □

Ricordiamo che un operatore $U$ è detto *locale* se gode di questa proprietà: se $F = 0$ q.o. sull'insieme misurabile $A$, allora $U(F) = 0$ q.o. su $A$.

**Proposizione 2.3.3.** *L'operatore $D : \mathbb{D}^{1,p} \to L^p$ è* **locale***.*

*Dimostrazione.* Ci si può ricondurre al caso $p = 2$ . Prendiamo una funzione continua pari $\varphi$ a valori positivi, con $\varphi(0) = 1$ e $\varphi(x) = 0$ per $|x| > 1$ ; poniamo poi per $\varepsilon > 0$ , $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi(\frac{x}{\varepsilon})$ e sia infine $\Phi_\varepsilon(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t$ .

Presa $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ , $D_s\Phi_\varepsilon(F) = \varphi_\varepsilon(F)\, D_sF$ e dunque, se $Z$ appartiene al dominio di $\delta$ , si ha

$$\mathbf{E}\big[\varphi_\varepsilon(F) \int_0^T D_sF\, Z_s\,\mathrm{d}s\big] = \mathbf{E}\big[\int_0^T D_s\big(\Phi_\varepsilon(F)\big) Z_s\,\mathrm{d}s\big] = \mathbf{E}\big[\Phi_\varepsilon(F)\,\delta(Z)\big]$$

e quindi

$$\Big|\mathbf{E}\big[\varphi_\varepsilon(F) \int_0^T D_sF\, Z_s\,\mathrm{d}s\big]\Big| \le \varepsilon\, C\, \mathbf{E}\big[\,|\delta(Z)|\,\big]$$

e, al limite per $\varepsilon \to 0$ , $\mathbf{E}\Big[I_{\{F=0\}} \int_0^T D_sF\, Z_s\,\mathrm{d}s\Big] = 0$ .

Considerando ora $Z$ della forma $Z(\omega, t) = G(\omega)\, h(t)$ con $G \in \mathcal{L}$ ed $h \in L^2(0, T)$ , non è difficile concludere che, sull'insieme $\big\{F = 0\big\}$ , $DF(\omega)$ (visto come elemento di $L^2(0, T)$) è nullo q.c. $\square$

Il risultato 2.3.3 consente di dare senza ambiguità la seguente

**Definizione 2.3.4** (**Funzionali localmente derivabili).** Si dice che $F \in \mathbb{D}^{1,p}_{loc}$ se esiste una successione crescente di insiemi misurabili $\Omega_1 \subseteq \Omega_2 \ldots$ (con $\bigcup_n \Omega_n = \Omega$ ) e, per ogni $n$, un elemento $F_n \in \mathbb{D}^{1,p}$ tale che si abbia $F = F_n$ q.c. sull'insieme $\Omega_n$ : $DF$ è definita secondo la regola $DF = DF_n$ q.c. sull'insieme $\Omega_n$ .

## 2.4 La formula di Clark–Ocone–Karatzas.

Sappiamo che un elemento $F \in L^2(\Omega)$ si può rappresentare come integrale di Ito $F = \mathbf{E}[F] + \int_0^T H_s\,\mathrm{d}W_s$ con un opportuno $H \in \mathcal{M}^2$ . La formula che segue permette di dare una rappresentazione esplicita del processo $H_s$ nel caso in cui $F$ sia derivabile (secondo Malliavin).

**Teorema 2.4.1** (**Formula di Clark–Ocone–Karatzas).** *Sia $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ : allora si ha $F = \mathbf{E}[F] + \int_0^T H_s\,\mathrm{d}W_s$ dove $H$ è la proiezione ortogonale di $DF$ sul sottospazio chiuso $L^2\big(\Omega \times [0, T]\, , \mathcal{P}\, , \mathbf{P} \otimes \mathrm{d}t\big)$ . In particolare, per quasi ogni $s$ , si ha $H_s = \mathbf{E}[D_sF|\mathcal{F}_s]$ q.c.*

Ricordiamo che per $L^2\big(\Omega \times [0, T]\, , \mathcal{P}\, , \mathbf{P} \otimes \mathrm{d}t\big)$ abbiamo anche usato più brevemente la notazione $\mathcal{M}^2$ .

*Dimostrazione.* La prima parte è facile: innanzi tutto possiamo supporre $\mathbf{E}[F]=0$, e consideriamo poi $K_s \in \mathcal{M}^2$.

Da una parte, poiché $F=\int_0^T H_s\,\mathrm{d}W_s$, si ha

$$\mathbf{E}\big[F.\big(\int_0^T K_s\,\mathrm{d}W_s\big)\big]=\mathbf{E}\big[\int_0^T H_sK_s\,\mathrm{d}s\big]$$

dall'altra, poichè $(\int_0^T K_s\,\mathrm{d}W_s)=\delta(K)$, si ha

$$\mathbf{E}\big[F.\big(\int_0^T K_s\,\mathrm{d}W_s\big)\big]=\mathbf{E}\big[\int_0^T D_sF\,K_s\,\mathrm{d}s\big]$$

L'eguaglianza $\mathbf{E}\big[\int_0^T H_sK_s\,\mathrm{d}s\big]=\mathbf{E}\big[\int_0^T D_sF\,K_s\,\mathrm{d}s\big]$ permette di concludere che $H$ è appunto la proiezione ortogonale di $DF$ su $\mathcal{M}^2$.

Consideriamo ora $Z\in L^2(\Omega\times[0,T])$, sia $\widetilde{Z}$ la sua proiezione ortogonale su $\mathcal{M}^2$ e proviamo che, per quasi ogni $t$, si ha $\widetilde{Z}_t=\mathbf{E}[Z_t|\mathcal{F}_t]$ q.c.

Cominciamo a supporre che $Z$ sia della forma $Z(\omega,t)=M(\omega)\,I_{]u,v]}(t)$, sia $M_t$ la martingala $M_t=\mathbf{E}[M|\mathcal{F}_t]$ e proviamo che $\widetilde{Z}(\omega,t)=M_t(\omega)\,I_{]u,v]}(t)$ coincide con la proiezione ortogonale su $\mathcal{M}^2$: infatti, preso $K_s\in\mathcal{M}^2$, si ha

$$\mathbf{E}\big[\int_0^T Z_sK_s\,\mathrm{d}s\big]=\int_u^v \mathbf{E}[MK_s]\,\mathrm{d}s=\int_u^v \mathbf{E}[M_s\,K_s]\,\mathrm{d}s=\mathbf{E}\big[\int_0^T \widetilde{Z}_sK_s\,\mathrm{d}s\big]$$

La stessa proprietà vale per una combinazione lineare finita di funzioni di quella forma, e queste combinazioni lineari sono dense in $L^2(\Omega\times[0,T])$.

Prendiamo ora $Z\in L^2(\Omega\times[0,T])$ ed una successione $(\widetilde{Z}^n)_{n\ge1}$ di v.a. della forma sopra specificata convergente a $Z$ in $L^2(\Omega\times[0,T])$ e siano $\widetilde{Z}^n$ e $\widetilde{Z}$ le relative proiezioni ortogonali su $\mathcal{M}^2$: anche $\widetilde{Z}^n$ converge a $\widetilde{Z}$ in $L^2(\Omega\times[0,T])$.

Dalla relazione $\lim_{n\to\infty}\int_0^T \mathbf{E}\big[\big(Z_t^n-Z_t\big)^2\big]\,\mathrm{d}t=0$ segue che, passando ad una sottosuccessione e per tutti i $t$ eccetto quelli di un insieme trascurabile, $(Z_t^n-Z_t)\to0$ in $L^2(\Omega)$; allo stesso modo $(\widetilde{Z}_t^n-\widetilde{Z}_t)\to0$ in $L^2(\Omega)$.

Per ogni $n$ e $t$ si ha $\widetilde{Z}_t^n=\mathbf{E}[Z_t^n|\mathcal{F}_t]$ e questa eguaglianza passa al limite (ricordare che la speranza condizionale rispetto a $\mathcal{F}_t$ è la proiezione ortogonale su $L^2(\Omega,\mathcal{F}_t,\mathbf{P})$). □

**Osservazione 2.4.2.** Come si è visto, la formula di *Clark–Ocone–Karatzas* è una facile conseguenza del fatto che, se $H$ è progressivamente misurabile, si ha $\int_0^T H_s\,\delta W_s=\int_0^T H_s\,\mathrm{d}W_s$. È facile vedere che le due proprietà sono di fatto *equivalenti*, più precisamente dalla formula 2.4.1 segue che la divergenza, ristretta ad $\mathcal{M}^2$, coincide con l'integrale di Ito.

Presi infatti $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ e $H \in \mathcal{M}^2$ si ha

$$\mathbf{E}\big[F.\big(\int_0^T H_s\,\mathrm{d}W_s\big)\big] = \mathbf{E}\big[\int_0^T \mathbf{E}\big[D_sF|\mathcal{F}_s\big]H_s\,\mathrm{d}s\big] = \mathbf{E}\big[\int_0^T D_sF\,H_s\,\mathrm{d}s\big]$$

e da questo segue che $\delta(H) = \int_0^T H_s\,\mathrm{d}W_s$ .

**Osservazione 2.4.3.** Il risultato del Teorema 2.4.1 può essere esteso a $F \in \mathbb{D}^{1,1}$ (anzi per essere precisi è proprio questo il contributo di Karatzas alla formula): l'idea è sostanzialmente la stessa ma la dimostrazione è tecnicamente molto più complicata.

**Esempio 2.4.4.** Proviamo a scrivere $|W_T|$ con l'ausilio della formula 2.4.1.

Sappiamo che $W_T$ è eguale in legge a $\sqrt{T}.X$ (dove $X \sim N(0,1)$), e quindi $\mathbf{E}\big[|W_T|\big] = \frac{\sqrt{2T}}{\sqrt{\pi}}$ . Sia ora $g_n$ una successione di funzioni di classe $\mathcal{C}^1$ , con $|g_n'(x)| \le 1$ e tali che $g_n(x) = |x|$ se $|x| \ge 1/n$ , e consideriamo $F_n = g_n(W_T)$ .

Si ha $\quad D_tF_n(\omega) = \begin{cases} -1 & \text{se } W_t(\omega) < -\frac{1}{n} \\ 1 & \text{se } W_t(\omega) > \frac{1}{n} \end{cases}$

Quindi, al limite (poiché l'insieme $\big\{W_T = 0\big\}$ è trascurabile), $D_t|W_T| = I_{\{W_T>0\}} - I_{\{W_T<0\}}$ .

Ricordiamo che, se $X$ è $\mathcal{E}$-misurabile ed $Y$ indipendente da $\mathcal{E}$ , e $g$ boreliana, si ha $\mathbf{E}\big[g(X,Y)\big|\mathcal{E}\big] = G(X)$ essendo $G(x) = \mathbf{E}\big[g(x,Y)\big]$ .

Si ottiene $\mathbf{E}\big[I_{\{W_T>0\}}\big|\mathcal{F}_t\big] = \mathbf{E}\big[I_{\{W_t+(W_T-W_t)>0\}}\big|\mathcal{F}_t\big] = g_1(W_t)$ , dove

$$g_1(x) = \mathbf{P}\big\{x+(W_T-W_t) > 0\big\} = \mathbf{P}\Big\{\frac{W_T-W_t}{\sqrt{T-t}} > \frac{-x}{\sqrt{T-t}}\Big\} = 1-\Phi\big(\frac{-x}{\sqrt{T-t}}\big)$$

essendo $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^x \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$ . Allo stesso modo si ottiene $\mathbf{E}\big[I_{\{W_T<0\}}\big|\mathcal{F}_t\big] = g_2(W_t)$ essendo $g_2(x) = \mathbf{P}\big\{x + (W_T - W_t) < 0\big\} = \Phi\big(\frac{-x}{\sqrt{T-t}}\big)$ .

In conclusione si ottiene $|W_T| = \dfrac{\sqrt{2T}}{\sqrt{\pi}} + \displaystyle\int_0^T H_s\,\mathrm{d}W_s$ dove $H_t = 1 - 2\,\Phi\big(\frac{-W_t}{\sqrt{T-t}}\big)$ .

Una conseguenza importante della formula 2.4.1 è il risultato seguente

**Teorema 2.4.5 (Diseguaglianze tipo "Sobolev-logaritmiche").** *Sia $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ : sono soddisfatte le seguenti diseguaglianze*

$$\mathbf{E}\big[F^2\big] \le \mathbf{E}[F]^2 + \mathbf{E}\big[\int_0^T (D_sF)^2\,\mathrm{d}s\big]$$

$$\mathbf{E}\big[F^2\log(F^2)\big] \leq \mathbf{E}[F^2]\log\big(\mathbf{E}[F^2]\big) + 2\mathbf{E}\Big[\int_0^T (D_sF)^2\,\mathrm{d}s\Big]$$

*Dimostrazione.* Partendo dalla formula $F = \mathbf{E}[F] + \int_0^T \mathbf{E}[D_sF|\mathcal{F}_s]\,\mathrm{d}W_s$, si ottiene

$$\mathbf{E}\big[F^2\big] = \mathbf{E}[F]^2 + \mathbf{E}\Big[\int_0^T \big(\mathbf{E}[D_sF|\mathcal{F}_s]\big)^2\mathrm{d}s\Big] = \mathbf{E}[F]^2 + \int_0^T \mathbf{E}\big[\big(\mathbf{E}[D_sF|\mathcal{F}_s]\big)^2\big]\mathrm{d}s \leq$$

$$\leq \mathbf{E}[F^2] + \int_0^T \mathbf{E}\big[(D_sF)^2\big]\mathrm{d}s = \mathbf{E}[F]^2 + \mathbf{E}\Big[\int_0^T (D_sF)^2\,\mathrm{d}s\Big]$$

Consideriamo ora $G \in \mathbb{D}^{1,2}$ con $G \geq \varepsilon > 0$; sia $M_t = \mathbf{E}[G|\mathcal{F}_t]$ e ricordiamo che si ha $\mathrm{d}M_t = \mathbf{E}[D_tG \,|\, \mathcal{F}_t]\,\mathrm{d}W_t$. Applichiamo la formula di Ito con $f(x) = x\log x$, ($f'(x) = \log x + 1$, $f''(x) = 1/x$): si ottiene

$$\mathbf{E}\big[G\,\log G\big] = \mathbf{E}[G]\log(\mathbf{E}[G]) + \frac{1}{2}\,\mathbf{E}\Big[\int_0^T \frac{1}{\mathbf{E}[G|\mathcal{F}_t]}\mathbf{E}\big[D_tG\big|\mathcal{F}_t\big]^2\,\mathrm{d}t\Big]$$

Questa formula si estende a $G \geq 0$: applichiamola allora a $F^2$. Ricordando che si ha $D_t(F^2) = 2F\,D_tF$, si ha di conseguenza

$$\mathbf{E}\big[D_t(F^2)\big|\mathcal{F}_t\big]^2 = 4\Big(\mathbf{E}\big[F\,D_tF\big|\mathcal{F}_t\big]\Big)^2 \leq 4\,\mathbf{E}\big[F^2\big|\mathcal{F}_t\big]\,\mathbf{E}\big[(D_tF)^2\big|\mathcal{F}_t\big]$$

Alla fine si ottiene

$$\mathbf{E}\big[F^2\log(F^2)\big] \leq \mathbf{E}[F^2]\log\big(\mathbf{E}[F^2]\big) + 2\mathbf{E}\Big[\int_0^T \mathbf{E}\big[(D_sF)^2\big|\mathcal{F}_s\big]\,\mathrm{d}s\Big] =$$

$$= \mathbf{E}[F^2]\log\big(\mathbf{E}[F^2]\big) + 2\mathbf{E}\Big[\int_0^T (D_sF)^2\,\mathrm{d}s\Big]$$

□

## 2.5 L'operatore di Malliavin ed il semigruppo di Ornstein-Uhlenbeck.

Esattamente come nel caso degli spazi Gaussiani finito-dimensionali, si chiama **operatore di Malliavin** l'operatore $L = \delta D$ (il suo dominio è $\mathcal{D}(L) = \big\{F \in \mathbb{D}^{1,2}\,\big|\, DF \in \mathcal{D}(\delta)\big\}$). Proviamo ora una versione *infinito-dimensionale* della formula "$DD^* = D^*D + I$" provata in $L^2(\gamma_n)$.

**Lemma 2.5.1.** *Siano $h, k \in L^2(0,T)$ e sia $Z(\omega,t) = \boldsymbol{\varepsilon}(h)(\omega).\,k(t)$: è soddisfatta la formula $D_t\delta(Z) = Z_t + \delta(D_tZ)$.*

*Dimostrazione.* Ricordando il risultato 2.3.2, si ha $\delta(Z) = \boldsymbol{\varepsilon}(h)\,W(k) - \boldsymbol{\varepsilon}(h).(h|k)$ (dove $(h|k)$ è il prodotto scalare in $L^2(0,T)$ ) e di conseguenza $D_t\delta(Z) = \boldsymbol{\varepsilon}(h)\,h(t)\,W(k) + \boldsymbol{\varepsilon}(h)\,k(t) - \boldsymbol{\varepsilon}(h)\,h(t)(h|k)$ .

D'altra parte si ha $D_t Z_s = \boldsymbol{\varepsilon}(h)\,h(t)\,k(s)$ , e quindi $\delta(D_t Z) = \boldsymbol{\varepsilon}(h)h(t)W(k) - \boldsymbol{\varepsilon}(h)\,h(t)\,(h|k)$ e questo completa la dimostrazione. □

Naturalmente la formula 2.5.1 è vera se $Z_t$ è una combinazione lineare finita di funzioni di quella forma.

**Lemma 2.5.2** (**Identità dell'energia di Nualart-Pardoux-Shigekawa).** *Siano $Z$ ed $R$ combinazioni lineari finite di v.a. della forma considerata nel Lemma 2.5.1: è soddisfatta la formula*

$$\mathbf{E}\Big[\Big(\int_0^T Z_s\,\delta W_s\Big)\Big(\int_0^T R_s\,\delta W_s\Big)\Big] =$$

$$= \mathbf{E}\Big[\int_0^T Z_s\,R_s\,\mathrm{d}s + \iint_{[0,T]\times[0,T]} D_t Z_s\,D_s R_t\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\Big]$$

*Dimostrazione.*

$$\langle\delta(Z)\,,\,\delta(R)\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle Z\,,\,D\delta(R)\rangle_{L^2(\Omega\times[0,T])} =$$

$$= \langle Z\,,\,R\rangle_{L^2(\Omega\times[0,T])} + \langle Z.\,,\,\delta(D.R)\rangle_{L^2(\Omega\times[0,T])} =$$

$$= \langle Z\,,\,R\rangle_{L^2(\Omega\times[0,T])} + \langle DZ.\,,\,D.R\rangle_{L^2(\Omega\times[0,T])}$$

□

Si ha in particolare

$$\mathbf{E}\big[\delta(Z)^2\big] \le \mathbf{E}\Big[\int_0^T Z_s^2\,\mathrm{d}s\Big] + \mathbf{E}\Big[\int_0^T \mathrm{d}s\int_0^T \big(D_s Z_t\big)^2\,\mathrm{d}t\Big] = \int_0^T \|Z_s\|^2_{\mathbb{D}^{1,2}}\,\mathrm{d}s$$

Poichè le v.a. considerate nel Lemmi 2.5.1 e 2.5.2 sono dense in $L^2(\Omega\times[0,T])$ , si arriva pertanto al seguente risultato

**Teorema 2.5.3.** *Supponiamo che, per ogni $t$, $Z_t \in \mathbb{D}^{1,2}$ , che esista una versione di $D_s Z_t(\omega)$ misurabile su $\Omega\times[0,T]\times[0,T]$ e che si abbia $\int_0^T \|Z_s\|^2_{\mathbb{D}^{1,2}}\,\mathrm{d}s < +\infty$ : allora $\delta(Z) \in \mathbb{D}^{1,2}$ e si ha*

$$D_t\Big(\int_0^T Z_s\,\delta W_s\Big) = Z_t + \int_0^T D_t Z_s\,\delta W_s$$

In particolare, se $H_t$ oltre a soddisfare le ipotesi del Teorema 2.5.3 è *progressivamente misurabile*, si ha

$$D_t\Big(\int_0^T H_s \,\mathrm{d}W_s\Big) = H_t + \int_t^T D_t H_s \,\mathrm{d}W_s$$

Il risultato seguente mostra che l'operatore di Malliavin $L$ si comporta come un *operatore differenziale.*

**Proposizione 2.5.4.** *Siano $(F_1,\dots,F_n)$ appartenenti al dominio di $L$ e a $\mathbb{D}^{1,4}$, sia $\varphi$ di classe $\mathcal{C}^2$ con derivate limitate: allora si ha*

$$L\big(\varphi(\mathbf{F})\big) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(\mathbf{F})L(F_i) + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{F})\ (DF_i|DF_j)_{L^2(0,T)}$$

*Dimostrazione.* La dimostrazione è una conseguenza della *regola della catena* per l'operatore $D$ e del Teorema 2.3.2: si ha infatti

$$L\big(\varphi(\mathbf{F})\big) = \delta\Big(\sum_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(\mathbf{F})\,DF_i\Big) =$$

$$= \sum_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(\mathbf{F})L(F_i) - \sum_{i,j} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{F}) \int_0^T D_sF_j\,D_sF_i \,\mathrm{d}s$$

□

Introduciamo ora il **semigruppo di Ornstein-Uhlenbeck** sullo spazio di Wiener. Ricordiamo che il semigruppo di O.U. su $L^2(\gamma_n)$ (indicato $T_t^{(n)}$) è definito dalla formula $\big(T_t^{(n)} f\big)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathrm{e}^{-t}\mathbf{x} + \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}\,\mathbf{y})\,\gamma_n(\mathrm{d}\mathbf{y})$.

Il semigruppo di O.U. su $L^2(\Omega)$ è definito in maniera analoga: è possibile introdurre un *processo di Ornstein-Uhlenbeck* a valori in uno spazio infinito-dimensionale, del quale il semigruppo di O.U. è appunto il semigruppo di transizione. Ci limitiamo a definire il solo semigruppo: ribadiamo che in questo capitolo $\Omega = \mathcal{C}_0(0,T)$ e che $\mathbf{P}$ è la *misura di Wiener* su $\Omega$.

**Definizione 2.5.5.** Data $F \in L^1(\Omega)$, definiamo

$$\big(T_tF\big)(\omega) = \int_\Omega F\big(\mathrm{e}^{-t}\omega + \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}\,\omega'\big)\,\mathbf{P}(\mathrm{d}\omega')$$

Il legame tra i semigruppi di O.U. sugli spazi gaussiani a dimensione finita e sullo spazio di Wiener è chiarito dal risultato seguente:

**Proposizione 2.5.6.** *Sia $F$ una funzione liscia della forma $F = \varphi\big(W(h_1), \dots, W(h_n)\big)$, dove $h_1, \dots, h_n$ sono* ortonormali *in $L^2(0,T)$: vale la formula*

$$\big(T_t F\big)(\omega) = \big(T_t^{(n)} \varphi\big) \circ \big(W(h_1)(\omega), \dots, W(h_n)(\omega)\big)$$

La **dimostrazione** di questa affermazione è un semplice esercizio, se si tiene conto del fatto che la legge di $\big(W(h_1), \dots, W(h_n)\big)$ è $\gamma_n$ e che, per ogni $h \in L^2(0,T)$, vale q.c. l'eguaglianza

$$W(h)(\mathrm{e}^{-t}\omega + \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}\,\omega') = \mathrm{e}^{-t} W(h)(\omega) + \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}\, W(h)(\omega')$$

Valgono per il semigruppo di O.U. sullo spazio di Wiener proprietà analoghe a quelle provate in 1.5.7 per il semigruppo di O.U su $L^2(\gamma_n)$:

**Proposizione 2.5.7.** *Sono soddisfatte le seguenti proprietà:*
*a) $(T_t)_{t \geq 0}$ è un semigruppo di* contrazioni *su $L^p(\Omega)$ per $1 \leq p \leq +\infty$,*
*b) $T_t$è simmetrico su $L^2(\gamma_n)$,*
*c) se $F \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$, si ha $lim_{t \to 0} T_t F = F$ in $L^p$.*

Ne segue in particolare che $(T_t)_{t \geq 0}$ è un *semigruppo fortemente continuo* in ogni $L^p(\Omega)$ per $1 \leq p < +\infty$. Osserviamo subito che *non è naturale* considerare il semigruppo $(T_t)_{t \geq 0}$ su uno spazio di funzioni continue su $\Omega = \mathcal{C}_0(0,T)$ perchè le stesse v.a. $W(h)(\omega) = \big(\int_0^T h(s)\,\mathrm{d}W_s\big)(\omega)$ *non sono funzioni continue nella variabile* $\omega$ (a meno che la funzione $h$ non sia a variazione finita): la prova di questa affermazione non è affatto elementare.

Per quanto riguarda la dimostrazione della Proposizione 2.5.7 (che a questo punto è facile) si può procedere in due modi: si può utilizzare la Proposizione 2.5.6 e le analoghe proprietà nel caso finito-dimensionale (vedi 1.5.7) tenendo conto del fatto che le variabili considerate in 2.5.6 sono dense in $L^p(\Omega)$ per $1 \leq p < +\infty$.

Altrimenti si può ripetere passo passo proprio la Proposizione 1.5.7, tenendo conto del fatto che se $\mathbf{W}$ e $\mathbf{W}'$ sono due processi di Wiener indipendenti, anche $\mathrm{e}^{-t}\mathbf{W} + \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}\,\mathbf{W}'$ (cioè, per ogni $s$, $(\mathrm{e}^{-t}W_s + \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2t}}\,W'_s)$ ) è un processo di Wiener.

Il risultato che segue prova che, anche nel caso dello spazio di Wiener, il *generatore infinitesimale* $A$ del semigruppo di O.U. coincide (a meno del segno) con l'*operatore di Malliavin* $L$.

**Teorema 2.5.8.** *Sia $F = \varphi\big(W(h_1), \dots, W(h_n)\big)$, con $h_1, \dots, h_n$* ortonormali *in $L^2(0,T)$ e $\varphi$ di classe $\mathcal{C}^2$ con derivate prime e seconde limitate: allora $F$ appartiene al dominio di $A$ e si ha $AF = -LF$.*

*Dimostrazione.* Partiamo dall'eguaglianza

$$\frac{T_t F - F}{t} = \Big( \frac{T_t^{(n)} \varphi - \varphi}{t} \Big) \circ \big( W(h_1), \dots, W(h_n) \big)$$

Abbiamo visto (vedi 1.5.7) che $\big(\frac{T_t^{(n)} \varphi - \varphi}{t}\big)$ converge uniformemente a $\Big( \sum_i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} - \sum_i x_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \Big)$ : tenendo conto della Proposizione 2.5.4, del fatto che si ha $L\big(W(h)\big) = W(h)$ e $\big(DW(h_i) \big| DW(h_j)\big)_{L^2(0,T)} = \delta_{ij}$ , la conclusione è immediata. □

La possibilità di estendere l'eguaglianza $AF = -LF$ a una classe più ampia di funzionali sarà chiara nel paragrafo successivo: il particolare lo sviluppo in caos di Wiener consente una caratterizzazione precisa del dominio dell'operatore $L$ .

## 2.6 Il punto di vista *"sviluppo in caos di Wiener"*.

Il punto di vista *"sviluppo in caos di Wiener"* rappresenta la controparte, nel caso dello spazio di Wiener, di quello che era stato lo sviluppo secondo i *polinomi di Hermite* nel caso dello spazio Gaussiano finito-dimensionale: non è essenziale per provare alcun risultato, tuttavia è utile per chiarire alcuni punti.

Se indichiamo con $S_n = \big\{ (t_1, \dots, t_n) \,\big|\, 0 < t_1 < t_2 \dots t_n < T \big\}$ il *simplesso* $n$-dimensionale, presa $f \in L^2(S_n)$ definiamo

$$J_n(f) = \int_0^T \mathrm{d}W_{t_n} \int_0^{t_n} \mathrm{d}W_{t_{n-1}} \dots \int_0^{t_2} f(t_1, \dots, t_n) \, \mathrm{d}W_{t_1}$$

(notare che $J_1(h) = W(h)$ ). È facile verificare che si ha $\mathbf{E}\big[J_n(f)^2\big] = \|f\|^2_{L^2(S_n)}$ , e più in generale

$$\mathbf{E}\big[J_n(f)\, J_m(g)\big] = \begin{cases} (f|g)_{L^2(S_n)} & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

Se indichiamo $\mathcal{C}_n = J_n\big(L^2(S_n)\big)$ , è chiaro che $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \dots$ è una successione di sottospazi chiusi di $L^2(\Omega)$ ortogonali tra loro ($\mathcal{C}_0$ sono le costanti), che sono chiamati rispettivamente il primo, il secondo … *caos di Wiener.*

**Teorema 2.6.1 (Sviluppo in caos di Wiener).** *Si ha la decomposizione come somma diretta*

$$L^2(\Omega) = \mathcal{C}_0 \oplus \mathcal{C}_1 \oplus \mathcal{C}_2 \oplus \cdots$$

*o, equivalentemente, ogni* $F \in L^2(\Omega)$ *si può scrivere nella forma*

$$F = \sum_{n=0}^{+\infty} J_n(f_n) \qquad \text{con} \qquad \big\|F\big\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \big\|f_n\big\|^2_{L^2(S_n)}$$

*Dimostrazione.* Poichè i diversi caos di Wiener sono sottospazi ortogonali, si ha

$$L^2(\Omega) = \mathcal{C}_0 \oplus \mathcal{C}_1 \oplus \cdots \oplus V$$

(dove $V$ è il sottospazio ortogonale a tutti i $\mathcal{C}_n$ ) e si tratta di provare che $V = \{0\}$ . Per fare questo proveremo che gli esponenziali di Wiener appartengono a $\mathcal{C}_0 \oplus \mathcal{C}_2 \oplus \cdots$ e poichè le loro combinazioni lineari sono dense in $L^2(\Omega)$ , questo permette di concludere.

Dato $\boldsymbol{\varepsilon}(h)$ , proviamo preliminarmente che la sua proiezione ortogonale su $\mathcal{C}_n$ è $h^{\otimes n}$ (cioè $h^{\otimes n}(t_1,\dots,t_n) = h(t_1)\cdots h(t_n)$ ).

Infatti, se $Y_t = \mathbf{E}[\boldsymbol{\varepsilon}(h)|\mathcal{F}_t]$ , si ha $\mathrm{d}Y_t = h(t)Y_t\,\mathrm{d}W_t$ e quindi, ad esempio

$$\mathbf{E}\Big[\Big(\int_0^T g(s)\,\mathrm{d}W_s\Big)\Big(\int_0^T h(s)Y_s\,\mathrm{d}W_s\Big)\Big] = \int_0^T g(s)h(s)\mathbf{E}[Y_s]\,\mathrm{d}s = (g|h)_{L^2(S_1)}$$

che prova che la proiezione ortogonale su $\mathcal{C}_1$ è $J_1(h)$ ; le proiezioni sugli altri caos di Wiener si provano allo stesso modo. Vale questa eguaglianza di norme

$$\mathbf{E}\big[\boldsymbol{\varepsilon}(h)^2\big] = \mathrm{e}^{\|h\|^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\|h\|^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \int\!..\!\int_{[0,T]^n} h^2(t_1)\cdots h^2(t_n)\,\mathrm{d}t_1\ldots\mathrm{d}t_n =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \int\!..\!\int_{S_n} h^2(t_1)\cdots h^2(t_n)\,\mathrm{d}t_1\ldots\mathrm{d}t_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \big\|h^{\otimes n}\big\|^2_{L^2(S_n)}$$

e questo mostra l'affermazione voluta. □

Se $f$ è una funzione *simmetrica* definita su $[0,T]^n$ (cioè è tale che $f(t_1,\dots,t_n) = f(t_{\sigma(1)},\dots,t_{\sigma(n)})$ dove $\sigma$ è una permutazione sull'insieme $\{1,\dots,n\}$ ) si ha

$$\int\!..\!\int_{[0,T]^n} f(t_1,\dots,t_n)\,\mathrm{d}t_1\ldots\mathrm{d}t_n = n! \int\!..\!\int_{S_n} f(t_1,\dots,t_n)\,\mathrm{d}t_1\ldots\mathrm{d}t_n$$

Sia allora $\widetilde{L}^2\big([0,T]^n\big)$ il sottospazio di $L^2\big([0,T]^n\big)$ formato dalle funzioni simmetriche. L'eguaglianza sopra scritta suggerisce la seguente

**Definizione 2.6.2.** Presa $g \in \widetilde{L}^2\big([0,T]^n\big)$, definiamo

$$I_n(g) = \int\!\!..\!\!\int_{[0,T]^n} g(t_1,\dots,t_n)\,\mathrm{d}W_{t_1}\dots\mathrm{d}W_{t_n} = n!\int\!\!..\!\!\int_{S_n} g(t_1,\dots,t_n)\,\mathrm{d}W_{t_1}\dots\mathrm{d}W_{t_n}$$

Si ha

$$\mathbf{E}\big[I_n(g)^2\big] = (n!)^2\int\!\!..\!\!\int_{S_n} g^2(\cdots)\,\mathrm{d}t_1\dots\mathrm{d}t_n = n!\int\!\!..\!\!\int_{[0,T]^n} g^2(\cdots)\,\mathrm{d}t_1\dots\mathrm{d}t_n$$

Quindi ogni $F \in L^2(\Omega)$ si può scrivere nella forma

$$F = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n(f_n) \qquad \text{con} \qquad \big\|F\big\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{n=0}^{+\infty} n!\,\big\|g_n\big\|^2_{\widetilde{L}^2([0,T]^n)}$$

Osserviamo che si ha $J_n(f_n) = I_n\big(\frac{f_n}{n!}\big)$ (dove $f_n$ è prolungata per simmetria da $S_n$ a $[0,T]^n$): ad esempio $\boldsymbol{\varepsilon}(h) = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n\big(\frac{h^{\otimes n}}{n!}\big)$.

Consideriamo ora $L^2(\Omega\times[0,T]) \cong L^2\big([0,T];L^2(\Omega)\big)$: una immediata conseguenza del Teorema 2.6.1 è il seguente risultato.

**Proposizione 2.6.3.** *Ogni $Z \in L^2(\Omega\times[0,T])$ si può scrivere nella forma*

$$Z_t = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n\big(f_n(\dots,t)\big)$$

*con $f_n : [0,T]^{n+1} \to \mathbb{R}$ simmetrica nelle prime $n$ variabili e tale che*

$$\big\|Z\big\|^2_{L^2(\Omega\times[0,T])} = \sum_{n=0}^{+\infty} n!\,\big\|f_n\big\|^2_{L^2([0,T]^{n+1})} < +\infty$$

**Osservazione 2.6.4.** È facile verificare che $Z_t$ è *adattato* se e solo se, per ogni $n$, $f_n(t_1,\dots,t_n,t) = 0$ se $t < \max(t_1,\dots,t_n)$.

La definizione originale di **integrale di Skorohod** è stata formulata nel modo seguente:

**Definizione 2.6.5.** Presa $Z \in L^2(\Omega\times[0,T])$ rappresentata nella forma della Proposizione 2.6.3, $Z$ appartiene al dominio dell'operatore $\widetilde{\delta}$ se si ha

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)!\,\big\|\widetilde{f}_n\big\|^2_{L^2([0,T]^{n+1})} < +\infty$$

(dove $\widetilde{f}_n$ è la *simmetrizzata* di $f_n$ su $[0,T]^{n+1}$), e si definisce

$$\widetilde{\delta}(Z) = \sum_{n=0}^{+\infty} I_{n+1}(\widetilde{f}_n)$$

Proveremo più avanti che l'operatore così definito è effettivamente l'integrale di Skorohod. Notiamo che, poichè $f_n(\dots)$ è simmetrica nelle prime $n$ variabili, si ha

$$\widetilde{f}_n(t_1,\dots,t_n,t) = \frac{f_n(t,t_2,\dots,t_1) + f_n(t_1,t,t_3,\dots,t_2) + \dots}{n+1}$$

e quindi $\|\widetilde{f}_n\|_{L^2([0,T]^{n+1})} \leq \|f_n\|_{L^2([0,T]^{n+1})}$ .

**Proposizione 2.6.6.** *Se $Z_t$ è* adattato*, l'operatore $\widetilde{\delta}$ coincide con l'integrale di Wiener: si ha più precisamente*

$$\widetilde{\delta}(Z) = \int_0^T Z_s \,\mathrm{d}W_s$$

*Dimostrazione.* Basta limitarsi a $Z_t = I_n\big(f_n(..,t)\big)$ con $f_n(t_1,\dots,t_n,t) = 0$ se $t < \max(t_1,\dots,t_n)$ .

Sull'insieme $S_{n+1}$ si ha $\widetilde{f}_n(t_1,\dots,t_n,t) = \dfrac{f_n(t_1,\dots,t_n,t)}{n+1}$ e di conseguenza

$$I_{n+1}(\widetilde{f}_n) = (n+1)! \int .. \int_{S_{n+1}} \widetilde{f}_n(...) \,\mathrm{d}W_{t_1} \dots \mathrm{d}W_t =$$

$$= n! \int .. \int_{S_{n+1}} f_n(..) \,\mathrm{d}W_{t_1} \dots \mathrm{d}W_{t_n} \,\mathrm{d}W_t = \int_0^T \mathrm{d}W_t \Big[ I_n\big(f_n(..,t)\big)\Big] = \int_0^T Z_t \,\mathrm{d}W_t$$

□

Definiamo ora un operatore $\widetilde{D} : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega \times [0,T])$ che agisce sul caos $n$-mo $\mathcal{C}_n$ secondo la regola $\widetilde{D}_t\big[I_n\big(f_n(t_1,..,t_{n-1},t)\big)\big] = n\, I_{n-1}\big(f_n(t_1,..,t_{n-1},t)\big)$

**Definizione 2.6.7.** Data $F = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n(f_n)$ , $F$ appartiene al dominio di $\widetilde{D}$ se vale la diseguaglianza

$$\sum_{n\geq 0} n\, n! \|f_n\|^2_{L^2([0,T]^n)} < +\infty$$

e in tal caso si pone $(\widetilde{D}F)_t = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, I_{n-1}\big(f_n(..,t)\big)$ .

**Proposizione 2.6.8.** *L'operatore $\widetilde{\delta}$ è l'operatore aggiunto di $\widetilde{D}$.*

*Dimostrazione.* Basta provare che se $f \in \widetilde{L}^2\big([0,T]^{n+1}\big)$, $g \in L^2\big([0,T]^{n+1}\big)$ ed è simmetrica nelle prime $n$ variabili, si ha

$$\langle \widetilde{D}_. I_{n+1}(f)\,,\, I_n(g(..,t))\rangle_{L^2(\Omega\times[0,T])} = \langle I_{n+1}(f)\,,\, \widetilde{\delta} I_n(g)\rangle_{L^2(\Omega)}$$

Il primo termine è

$$(n+1)\langle I_n\big(f(.,t)\big)\,,\, I_n\big(g(.,t)\big)\rangle_{L^2(\Omega\times[0,T])} = (n+1)n!\int..\int_{[0,T]^{n+1}} f(.)g(.)\,\mathrm{d}t_1..\mathrm{d}t_n\,\mathrm{d}t$$

ed il secondo termine è

$$(n+1)!\int\!\!\int_{[0,T]^{n+1}} f(.)\widetilde{g}(.)\,\mathrm{d}t_1..\mathrm{d}t_n\,\mathrm{d}t$$

e l'eguaglianza tra questi due termini è dovuta al fatto che $f$ è simmetrica nelle $(n+1)$ variabili. □

Proviamo ora che $\widetilde{D}$ coincide con la *derivata di Malliavin*, e di conseguenza $\widetilde{\delta}$ coincide con la *divergenza o integrale di Skorohod*.

**Teorema 2.6.9.** *L'operatore $\widetilde{D}$ coincide con la* **derivata di Malliavin**.

*Dimostrazione.* Basta provare che, presa $h \in L^2(0,T)$, si ha $\widetilde{D}_t\,\boldsymbol{\varepsilon}(h)(\omega) = \boldsymbol{\varepsilon}(h)(\omega).h(t)$.

Partendo dalla rappresentazione $\boldsymbol{\varepsilon}(h) = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n\big(\frac{h^{\otimes n}}{n!}\big)$, si ottiene

$\widetilde{D}_t\,\boldsymbol{\varepsilon}(h) = \sum_{n=1}^{+\infty} I_{n-1}\big(\frac{h^{\otimes(n-1)}}{(n-1)!}\big)\,h(t)$, e questo è proprio il risultato voluto. □

**Osservazione 2.6.10.** Si può notare come le condizioni per l'esistenza di $\delta$ e di $D$ espresse nelle definizioni 2.6.5 e 2.6.7 siano quasi la trasposizione nello spazio di Wiener delle condizioni espresse nello spazio gaussiano finito-dimensionale dalla Proposizione 1.3.3. Questo parallelo è ancora più evidente se si considera l'operatore di Malliavin $L$.

**Teorema 2.6.11 (Caratterizzazione dell'operatore di Malliavin secondo lo sviluppo in caos di Wiener).** *Data $F = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n(f_n)$, $F$ appartiene al dominio di $L$ se vale la diseguaglianza*

$$\sum_{n\geq 0} n^2\, n! \big\|f_n\big\|^2_{L^2([0,T]^n)} < +\infty$$

*e in tal caso si ha $LF = \sum_{n=1}^{+\infty} n.I_n(f_n)$.*

*Di conseguenza gli autovalori dell'operatore $L$ sono tutti gli interi positivi* 0, 1, ... *ed i corrispondenti autospazi sono $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \ldots$*

*Dimostrazione.* La dimostrazione è immediata: è infatti sufficiente provare che, se $f \in \widetilde{L}^2([0,T]^n)$ si ha $L(I_n(f)) = \delta\, D\, I_n(f) = n.I_n(f)$ e questo è un semplice esercizio. □

Così come è stata definita la derivata $D_t$, si possono definire le *derivate iterate* $D_s\, D_t\, F$ (e si ha $D_s\, D_t\, F = D_t\, D_s\, F$).

**Proposizione 2.6.12 (Formula di Stroock-Taylor).** *Sia* $F \in \mathbb{D}^{\infty,2}$ *: si ha* $F = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n(f_n)$ *dove*

$$f_n(t_1, \dots, t_n) = \mathbf{E}\big[\frac{D_{t_1} \dots D_{t_n} F}{n!}\big]$$

Lasciamo per esercizio la dimostrazione, che può essere fatta in due modi:

- una verifica diretta sugli *esponenziali di Wiener*
- un calcolo diretto su $I_n(f_n)$ (con $f_n \in \widetilde{L}^2([0,T]^n)$ .

Finora abbiamo visto delle *analogie* tra sviluppo in polinomi di Hermite e sviluppo in caos di Wiener: vediamo adesso che in realtà il legame è molto più stretto. Ricordiamo che $H_1$, $H_2, \dots$ sono i *polinomi di Hermite* su $\mathbb{R}$ che sono stati definiti nel Capitolo 1.

**Proposizione 2.6.13.** *Presa* $h \in L^2(0,T)$ *, vale l'eguaglianza*

$$I_n\big(h^{\otimes n}\big) = \|h\|^n\, H_n\Big(W\big(\frac{h}{\|h\|}\big)\Big)$$

*(dove con* $\|h\|$ *si intende la norma di* $\|h\|$ *in* $L^2(0,T)$ *).*

*Dimostrazione.* Partiamo dall'eguaglianza, stabilita in 1.3.2, $\exp\big(tx - \frac{t^2}{2}\big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}\, H_n(x)$ : consideriamo ora $h \in L^2(0,T)$ con $\|h\| = 1$ e applichiamo l'eguaglianza sopra scritta a $\lambda\, h$ , $\lambda \in \mathbb{R}$ . Si ottiene

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\lambda\, h) = \exp\big(\lambda W(h) - \frac{\lambda^2}{2}\big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!}\, H_n\big(W(h)\big)$$

Viceversa, partendo dallo sviluppo di $\boldsymbol{\varepsilon}(\lambda\, h)$ in caos di Wiener, si ha

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\lambda\, h) = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n\Big(\frac{(\lambda h)^{\otimes n}}{n!}\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!}\, I_n\big(h^{\otimes n}\big)$$

Poichè queste due serie di potenze (in $\lambda$) coincidono, si ha quasi ovunque $H_n\big(W(h)\big) = I_n\big(h^{\otimes n}\big)$ . Applicando il risultato precedente a $\frac{h}{\|h\|}$ si ottiene il risultato voluto. □

**Osservazione 2.6.14.** Poichè le combinazioni lineari della forma $\sum_{i=1}^{k} c_i.h_i^{\otimes n}$ sono dense in $\widetilde{L}^2([0,T]^n)$, l'eguaglianza sopra scritta permette di **definire** gli integrali stocastici iterati $I_n(.)$ senza utilizzare l'integrale di Ito.

Non è difficile provare che, dato uno spazio di Hilbert separabile $H$, si può costruire una isometria $h \to W(h)$ da $H$ su un sottospazio di un opportuno $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ in modo tale che $W(h)$ sia una v.a. gaussiana di legge $N(0, \|h\|^2)$. In base all'eguaglianza stabilita nella Proposizione 2.6.13 è possibile pertanto introdurre in un quadro generale gli *integrali iterati* $I_n(.)$, gli operatori di *derivazione* e *divergenza* e sostanzialmente ricostruire tutta la teoria svolta in questo capitolo in un quadro astratto. Personalmente sono piuttosto scettico sul valore di queste generalizzazioni, a meno che non ci sia un valido motivo per farle.

Concludiamo con un risultato di *rappresentazione spettrale* del semigruppo di O.U. sullo spazio di Wiener. Ricordiamo che (vedi 1.5.9) se $T_t^{(n)}$ è il semigruppo di O.U. sullo spazio $L^2(\gamma_n)$, si ha la rappresentazione $T_t^{(n)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-kt} P_k^{(n)}$, dove $P_k^{(n)}$ è la proiezione ortogonale sull'autospazio relativo all'autovalore $k$ (cioè lo spazio generato dai polinomi di Hermite $n$-dimensionali $H_{\boldsymbol{\alpha}}(.)$ con $|\boldsymbol{\alpha}| = k$).

**Teorema 2.6.15.** *Sia* $(T_t)_{t\geq 0}$ *il* semigruppo di Ornstein-Uhlenbeck *sullo spazio di Wiener, e siano* $P_0, P_1, \dots$ *le proiezioni ortogonali sui caos di Wiener* $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, ..$ *: si ha la rappresentazione*

$$T_t = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-kt} P_k$$

*Dimostrazione.* È sufficiente provare l'eguaglianza sopra scritta sulle v.a. della forma $\boldsymbol{\varepsilon}(\lambda\, h)$ con $\|h\| = 1$: abbiamo visto (vedi 2.6.13) che si ha $\boldsymbol{\varepsilon}(\lambda\, h) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} H_k\big(W(h)\big)$, e di conseguenza $P_k\big(\boldsymbol{\varepsilon}(\lambda\, h)\big) = \frac{\lambda^k}{k!} H_k\big(W(h)\big)$.

Sia $f$ la funzione $f(x) = \exp\big(\lambda\, x - \frac{\lambda^2}{2}\big)$, in modo che vale l'eguaglianza $\boldsymbol{\varepsilon}(\lambda\, h) = f\big(W(h)\big)$: ricordiamo inoltre che si ha (vedi Proposizione 2.5.6)

$$T_t\big(f(W(h))\big) = \big(T_t^{(1)} f\big) \circ \big(W(h)\big)$$

Abbiamo visto in 1.5.9 che vale l'eguaglianza

$$\big(T_t^{(1)} f\big)(x) = \exp\big(\mathrm{e}^{-t}\lambda\, x - \frac{\lambda^2 \mathrm{e}^{-2t}}{2}\big)$$

e di conseguenza si ottiene finalmente

$$T_t\big(\boldsymbol{\varepsilon}(\lambda\, h)\big) = T_t\Big(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} H_k\big(W(h)\big)\Big) =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-kt}\, \frac{\lambda^k}{k!}\, H_k\big(W(h)\big) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-kt} P_k\big(\boldsymbol{\varepsilon}(\lambda\, h)\big)$$

e questo completa la dimostrazione. □

# Capitolo 3

# Derivabilità nel senso di Malliavin di soluzioni di equazioni differenziali stocastiche.

## 3.1 Equazioni differenziali stocastiche.

Ci limitiamo per semplicità al caso a una dimensione, ma tutti i risultati esposti si estendono senza grosse difficoltà al caso vettoriale. Sia dato dunque un processo di Wiener $(W_t)_{0\leq t\leq T}$ rispetto ad una filtrazione $\big(\mathcal{F}_t\big)_{0\leq t\leq T}$ (non necessariamente la filtrazione generata da processo di Wiener).

Consideriamo una equazione differenziale stocastica della forma

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t = a(t, X_t)\,\mathrm{d}t + b(t, X_t)\,\mathrm{d}W_t \\ X_0 = V \end{cases} \tag{3.1.1}$$

la cui soluzione è un processo di Ito $X$ tale che si abbia
$X_t = V + \int_0^t a(s, X_s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t b(s, X_s)\,\mathrm{d}W_s\,.$

Il primo risultato di esistenza ed unicità che viene ora è una estensione abbastanza semplice del teorema di Cauchy di esistenza ed unicità di una equazione differenziale ordinaria.

**Teorema 3.1.1.** *Supponiamo che le due funzioni $a(.,.)$ e $b(.,.)$ siano continue e che esistano due costanti $K$ e $C$ tali che si abbia*

$$\big|a(t,x) - a(t,y)\big| \leq K\,|x-y| \qquad \big|a(t,x)\big| \leq C\big(1+|x|\big)$$

$$\big|b(t,x) - b(t,y)\big| \leq K\,|x-y| \qquad \big|b(t,x)\big| \leq C\big(1+|x|\big)$$

*e supponiamo inoltre che $V$ sia $\mathcal{F}_0$-misurabile e di quadrato integrabile: allora l'equazione 3.1.1 ammette una ed una sola soluzione.*

*Dimostrazione.* La dimostrazione può essere fatta sia utilizzando il metodo delle approssimazioni successive che il teorema delle contrazioni: utilizziamo il secondo metodo ed allo scopo introduciamo questo spazio vettoriale di processi stocastici

$$\mathcal{S} = \Big\{ (X_t)_{0\le t\le T} \ \text{adattati a traiettorie continue} \Big| \sup_{0\le s\le T} |X_s| \in L^2 \Big\}$$

È facile verificare che $\mathcal{S}$ è uno spazio di Banach munito della norma $\big\|X\big\|^2 = \mathbf{E}\big[\sup_{0\le s\le T} |X_s|^2\big]$.

Consideriamo allora l'applicazione $\Phi : X \to Y$ dove $Y_t = V + \int_0^t a(s, X_s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t b(s, X_s)\,\mathrm{d}W_s$ : dobbiamo provare che $\Phi : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ e che è una **contrazione** in $\mathcal{S}$, cioè che esiste una costante $k < 1$ tale che si abbia $\big\|\Phi(X) - \Phi(Y)\big\| \le k\,\big\|X - Y\big\|$.

Useremo ripetutamente questa diseguaglianza (che risulta dall'isometria di Ito e dalla diseguaglianza di Doob): se $M_t = \int_0^t H_s\,\mathrm{d}W_s$ si ha

$$\mathbf{E}\big[\sup_{0\le t\le T} |M_t|^2\big] \le 4\,\mathbf{E}\big[M_T^2\big] = 4\,\mathbf{E}\big[\int_0^T H_s^2\,\mathrm{d}s\big]$$

Vediamo dunque che $\Phi : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$. Se

$$\Phi(X)_t = V + \int_0^t a(s, X_s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t b(s, X_s)\,\mathrm{d}W_s$$

si ha

$$\sup_{0\le t\le T} \big|\Phi(X)_t\big|^2 \le 3V^2 + 3T^2\big(\sup_{0\le s\le T} |a(s, X_s)|^2\big) + 3 \sup_{0\le t\le T} \Big| \int_0^t b(s, X_s)\,\mathrm{d}W_s\Big|^2$$

e, integrando, si ottiene

$$\mathbf{E}\Big[\sup_{0\le t\le T} \big|\Phi(X)_t\big|^2\Big] \le 3\,\mathbf{E}[V^2] + 3\,T^2\,C^2\Big(1 + \mathbf{E}\big[\sup_{0\le t\le T} |X_t|^2\big]\Big) +$$

$$+12\,T^2\,C^2\Big(1 + \mathbf{E}\big[\sup_{0\le t\le T} |X_t|^2\big]\Big) < +\infty$$

Vediamo ora che $\Phi$ è una contrazione: poichè

$$\Phi(X)_t - \Phi(Y)_t = \int_0^t \big(a(s, X_s) - a(s, Y_s)\big)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \big(b(s, X_s) - b(s, Y_s)\big)\,\mathrm{d}W_s$$

si ottiene

$$\sup_{0\le t\le T}\Big|\Phi(X)_t-\Phi(Y)_t\Big|^2\le 2\,T^2\,K^2\sup_{0\le t\le T}|X_t-Y_t|^2+$$

$$+2\sup_{0\le t\le T}\Big|\int_0^t\big(b(s,X_s)-b(s,Y_s)\big)\,\mathrm{d}W_s\big)\Big|^2$$

e, con passaggi analoghi a quelli precedentemente fatti, si ottiene

$$\mathbf{E}\Big[\sup_{0\le t\le T}\big|\Phi(X)_t-\Phi(Y)_t\big|^2\Big]\le$$

$$\le 2\,K^2\,T^2\mathbf{E}\big[\sup_{0\le t\le T}|X_t-Y_t|^2\big]+8\,K^2\mathbf{E}\big[\int_0^T|X_s-Y_s|^2\,\mathrm{d}s\big]\le$$

$$\le K^2(2T^2+8T)\mathbf{E}\big[\sup_{0\le t\le T}|X_t-Y_t|^2\big]$$

Quindi $\Phi$ è una contrazione a patto che si abbia $K^2(2T^2+8T)<1$ : si ottiene così il risultato di esistenza ed unicità su un intervallo temporale $[0,T_1]$ , poi si riparte da $T_1$ prendendo come valore iniziale $X_{T_1}$ e con un numero finito di passaggi si ottiene l'esistenza ed unicità su tutto l'intervallo $[0,T]$ . □

D'ora innanzi supponiamo in questo capitolo che le funzioni $a(.,.)$ e $b(.,.)$ , oltre a verificare le ipotesi del Teorema 3.1.1, **siano $\mathcal{C}^1$ rispetto alla variabile $x$ e con derivata parziale $a_x(.,.)$ e $b_x(.,.)$ uniformemente limitata**. Queste ipotesi possono essere notevolmente indebolite a prezzo di maggiori complicazioni tecniche nelle dimostrazioni.

Indichiamo con $X_t^x$ la soluzione dell'equazione 3.1.1 con dato iniziale $X_0=x$ : deriviamo formalmente rispetto ad $x$ la soluzione $X_t^x$ ottenendo, se $Y_t^x=\dfrac{\partial X_t^x}{\partial x}$ ,

$$\begin{cases} dY_t^x=a_x(t,X_t^x)\,Y_t^x\,\mathrm{d}t+b_x(t,X_t^x)Y_t^x\,\mathrm{d}W_t\\ Y_0^x=1\end{cases}\tag{3.1.2}$$

**Definizione 3.1.2 (Prima variazione).** Chiamiamo *prima variazione* dell'equazione 3.1.1 il processo $Y_t^x$ soluzione dell'equazione 3.1.2, che si può scrivere esplicitamente nella forma

$$Y_t^x=\exp\Big(\int_0^t\big(a_x(s,X_s^x)-\frac{b_x(s,X_s^x)^2}{2}\big)\,\mathrm{d}s+\int_0^t b_x(s,X_s^x)\,\mathrm{d}W_s\Big)$$

Proveremo nel paragrafo successivo che $X_t^x$ si può effettivamente derivare rispetto alla variabile $x$ ottenendo il processo di prima variazione. Sempre nel paragrafo successivo proveremo che la v.a. $X_t^x$ è derivabile secondo Malliavin e che vale la formula, per $s \leq t$

$$D_s X_t^x = b(s, X_s^x) + \int_s^t a_x(u, X_u^x)\, D_s X_u^x \,\mathrm{d}u + \int_s^t b_x(u, X_u^x)\, D_s X_u^x \,\mathrm{d}W_u$$

Notiamo in particolare che si ha

$$D_s X_t^x = b(s, X_s^x)\, \exp\Big( \int_s^t \big(a_x(.,.) - \frac{b_x(.,.)^2}{2}\big)\,\mathrm{d}u + \int_s^t b_x(.,.)\,\mathrm{d}W_u \Big) =$$

$$= b(x, X_s^x)\,\big(Y_s^x\big)^{-1}\, Y_t^x$$

## 3.2 Dimostrazione dei risultati di derivabilità.

Il primo risultato permette di *derivare secondo Malliavin sotto il segno di integrale*, ed è il seguente:

**Teorema 3.2.1.** *Sia $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ un processo stocastico (non necessariamente adattato): supponiamo che, per ogni $t$, $X_t \in \mathbb{D}^{1,2}$, che esista una versione di $D_s X_t$ misurabile su $\Omega \times [0,T] \times [0,T]$ e che si abbia*

$$\int_0^T \big\|X_t\big\|^2_{\mathbb{D}^{1,2}}\,\mathrm{d}t < +\infty$$

*Allora $\big(\int_0^T X_t\,\mathrm{d}t\big) \in \mathbb{D}^{1,2}$ e si ha $D_s\big(\int_0^T X_t\,\mathrm{d}t\big) = \int_0^T (D_s X_t)\,\mathrm{d}t$*

*Dimostrazione.* La dimostrazione è una semplice conseguenza dell'Esercizio 2.2.12: prendiamo $G \in \mathcal{L}$ ed $h \in L^2(0,T)$. Per ogni $t$ fissato si ha

$$\mathbf{E}\Big[\big(\int_0^T D_s X_t\, h(s)\,\mathrm{d}s\big)\, G\Big] = \mathbf{E}\big[-X_t\, D_h G + X_t\, G\, W(h)\big]$$

e, integrando rispetto a $t$ e scambiando l'ordine di integrazione col teorema di Fubini–Tonelli, si ottiene

$$\mathbf{E}\Big[\Big(\int_0^T\big(\int_0^T D_s X_t\,\mathrm{d}t\big)\, h(s)\,\mathrm{d}s\Big)\, G\Big] = \mathbf{E}\Big[\big(-\int_0^T X_t\,\mathrm{d}t\big)\, D_h G + \big(\int_0^T X_t\,\mathrm{d}t\big) G W(h)\Big]$$

e questo è il risultato cercato.

$\square$

Prima di dimostrare la derivabilità rispetto a Malliavin della soluzione di un'equazione differenziale stocastica, ricordiamo come si dimostra il teorema di esistenza dell'equazione

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t = a(t, X_t)\,\mathrm{d}t + b(t, X_t)\,\mathrm{d}W_t \\ X_0 = V \end{cases}$$

col **metodo delle approssimazioni successive** (l'unicità si può dimostrare con una variante del *Lemma di Gronwall*).

Definiamo dunque, per induzione, $X_t^1 \equiv V$ , e

$$X_t^{n+1} = V + \int_0^t a(s, X_s^n)\,\mathrm{d}s + \int_0^t b(s, X_s^n)\,\mathrm{d}W_s$$

Si ottiene in particolare

$$X_t^{n+1} - X_t^n = \int_0^t \left[a(s, X_s^n) - a(s, X_s^{n-1})\right] \mathrm{d}s + \int_0^t \left[b(s, X_s^n) - b(s, X_s^{n-1})\right] \mathrm{d}W_s$$

Possiamo utilizzare le maggiorazioni del Teorema 3.1.1, però leggermente modificate.

Si parte dalla maggiorazione

$$\sup_{0\le t\le T} \left|X_t^{n+1} - X_t^n\right|^2 \le 2\,K^2 \Big(\int_0^t \sup_{0\le s\le t} |X_s^n - X_s^{n-1}|\,\mathrm{d}s\Big)^2 +$$

$$+2 \sup_{0\le t\le T} \Big|\int_0^t \big(b(s, X_s^n) - b(s, X_s^{n-1})\big)\,\mathrm{d}W_s\Big|^2$$

e, integrando su $\Omega$ rispetto a $\mathbf{P}$ , si ottiene

$$\mathbf{E}\Big[\sup_{0\le t\le T} \left|X_t^{n+1} - X_t^n\right|^2\Big] \le$$

$$\le 2\,K^2\,T \int_0^T \mathbf{E}\big[\sup_{0\le s\le t} |X_s^n - X_s^{n-1}|^2\big]\,\mathrm{d}t + 8\,K^2 \int_0^T \mathbf{E}\big[\sup_{0\le s\le t} |X_s^n - X_s^{n-1}|^2\big]\,\mathrm{d}t \le$$

$$\le K^2(2T+8) \int_0^T \mathbf{E}\big[\sup_{0\le s\le t} |X_s^n - X_s^{n-1}|^2\big]\,\mathrm{d}t$$

Chiamando, per $n \ge 1$ , $g_n(t) = \mathbf{E}\Big[\sup_{0\le s\le t} |X_s^n - X_s^{n-1}|^2\Big]$ , (con la convenzione che $X_t^0 \equiv 0$ ), si ottiene ricorsivamente

$$g_n(T) \le K^2(2T+8) \int_0^T g_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t \le K^4(2T+8)^2 \int_0^T \mathrm{d}t \int_0^t g_{n-2}(s)\,\mathrm{d}s \le$$

$$\leq \cdots \leq \frac{\big(K^2(2T+8)\big)^n\ T^n C}{n!}$$

dove $C$ è una opportuna costante (che si può calcolare esplicitamente, ma non è rilevante). Ne segue che la serie $\sum_n \big(X^{n+1}_{.} - X^n_{.}\big)$ converge in $\mathcal{S}$, cioè $X^n_{.}$ converge in $\mathcal{S}$ ed è facile verificare che il limite è la soluzione.

Questo metodo delle approssimazioni successive permette di dimostrare agevolmente il seguente risultato:

**Teorema 3.2.2.** *La soluzione $X_t$ dell'equazione 3.1.1 appartiene a $\mathbb{D}^{1,2}$ e si ha, per $s < t$ :*

$$D_s X_t = b(s, X_s) + \int_s^t a_x(u, X_u)\, D_s X_u \,\mathrm{d}u + \int_s^t b_x(u, X_u)\, D_s X_u \,\mathrm{d}W_u$$

*Dimostrazione.* Ricordiamo che abbiamo supposto che $a_x(.,.)$ e $b_x(.,.)$ esistano e siano uniformemente limitate: tenendo conto dei risultati 3.2.1 e 2.5.3 e della *regola della catena*, se $X^n_t$ è la successione delle *approssimazioni successive* sopra definite, si ottiene per induzione che ogni $X^n_t \in \mathbb{D}^{1,2}$ e che si ha, per $s \leq t$

$$D_s X^{n+1}_t = b(s, X^n_s) + \int_s^t a_x(u, X^n_u)\, D_s X^n_u \,\mathrm{d}u + \int_s^t b_x(u, X^n_u)\, D_s X^n_u \,\mathrm{d}W_u$$

Grazie alla Proposizione 2.2.7, è sufficiente provare che esiste una costante $C$ tale che si abbia, qualunque sia $n$

$$\mathbf{E}\Big[\int_0^T \mathrm{d}s \int_s^T \big(D_s X^n_t\big)^2 \,\mathrm{d}t\Big] \leq C$$

In realtà risulta più comodo provare una diseguaglianza leggermente più forte: infatti se si definisce

$$\psi_n(t) = \sup_{0\leq s\leq t} \mathbf{E}\big[\sup_{s\leq u\leq t} |D_s X^n_u|^2\big]$$

con passaggi simili a quelli precedentemente svolti, si prova che esistono due costanti positive $c_1$ e $c_2$ tali che si abbia

$$\psi_{n+1}(t) \leq c_1 + c_2 \int_0^t \psi_n(s)\,\mathrm{d}s$$

Il classico *Lemma di Gronwall* afferma che, se $\psi(t)$ è una funzione a valori positivi che verifica la diseguaglianza $\psi(t) \leq c_1 + c_2 \int_0^t \psi(s)\,\mathrm{d}s$ , allora si ha

$\psi(t) \le c_1\, \mathrm{e}^{c_2 t}$ . Questo risultato può essere agevolmente modificato nel modo seguente (lasciamo la verifica per esercizio): se $\psi_1(t) \le c_1$ e $\psi_{n+1}(t) \le c_1 + c_2 \displaystyle\int_0^t \psi_n(s)\, \mathrm{d}s$ , allora per ogni $n$ si ha $\psi_n(t) \le c_1\, \mathrm{e}^{c_2 t}$ .

Si ottiene così la derivabilità (nel senso di Malliavin) del limite $X_t$ e l'equazione

$$D_s X_t = b(s, X_s) + \int_s^t a_x(u, X_u)\, D_s X_u\, \mathrm{d}u + \int_s^t b_x(u, X_u)\, D_s X_u\, \mathrm{d}W_u$$

□

Vediamo ora la derivabilità della soluzione $X_t^x$ rispetto al dato iniziale $x$: osserviamo che è possibile, con risultati su flussi di equazioni differenziali stocastiche, provare che esiste una versione della soluzione $X^x(\omega, t)$ che sia derivabile rispetto ad $x$ per (quasi) ogni $(\omega, t)$ fissati. Si tratta però di risultati di dimostrazione molto impegnativa.

Tuttavia per gli sviluppi del paragrafo successivo a noi basta un risultato più debole: poichè avremo bisogno di *derivare sotto il segno d'integrale*, è cioè sufficiente provare che l'applicazione $x \to X_t^x$ (pensata a valori in $L^2$) è derivabile.

Avremo in realtà un risultato un poco più forte (come si vedrà nel successivo Teorema 3.2.4) e a tale scopo ci serviremo di una forma un poco modificata di un Lemma dovuto a Da Prato.

**Lemma 3.2.3.** *Sia $B$ uno spazio di Banach e sia $F : \mathbb{R} \times B \to B$ tale che:*

*a) esiste una costante $K < 1$ tale che, presi comunque $x \in \mathbb{R}$ e $X$, $Y \in B$ si abbia $\big\| F(x, X) - F(x, Y) \big\|_B \le K\, \|X - Y\|_B$ ;*

*b) esistono $F_x \in B$ e $F_X \in \mathcal{L}(B, B)$ tali che, presi comunque $x$, $y \in \mathbb{R}$, $X$, $Y \in B$ , si abbia*

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x + hy, X + hY) - F(x, X)}{h} = F_x(x, X)\, y + F_X(x, X)\, Y$$

*c) le funzioni $F_x(.,.) : \mathbb{R} \times B \to B$ e $F_X(.,.) : \mathbb{R} \times B \to \mathcal{L}(B, B)$ sono continue.*

*Allora la funzione $x \to X^x$ , dove $X^x$ è l'unica soluzione dell'equazione $F(x, X^x) = X^x$ , è differenziabile e si ha*

$$\frac{\partial X^x}{\partial x} = F_x(x, X^x) + F_X(x, X^x)\, \frac{\partial X^x}{\partial x}$$

*Dimostrazione.* Poichè, rispetto alla seconda variabile, $F(.,.)$ è una contrazione, per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste un *punto fisso* $X^x$ tale che $F(x, X^x) = X^x$ : cominciamo a vedere che l'applicazione $x \to X^x$ è continua. Si ha infatti

$$X^x - X^y = F(x, X^x) - F(y, X^x) + F(y, X^x) - F(y, X^y)$$

e da qui si ottiene

$$\big\|X^x - X^y\big\|_B \leq K \big\|X^x - X^y\big\|_B + \big\|F(x, X^x) - F(y, X^x)\big\|_B$$

e poiché $K < 1$ si ricava immediatamente la continuità.

Notiamo che dalla proprietà b) segue che, per $x$ fissato, $F(.,.)$ è derivabile secondo Gateaux rispetto alla seconda componente; inoltre (per la proprietà a) ) $\big\|F_X(.,.)\big\|_{\mathcal{L}(B,B)} \leq K$ .

Dalle proprietà b) e c) segue che la funzione
$t \to F\big((1-t)x + ty\, ,\, (1-t)X + tY\big)$ è derivabile, e si ha

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F\big((1-t)x + ty\, ,\, (1-t)X + tY\big) =$$

$$= F_x\big((1-t)x+ty\, ,\, (1-t)X+tY\big)\,(y-x) + F_X\big((1-t)x+ty\, ,\, (1-t)X+tY\big)\,(Y-X)$$

Di conseguenza

$$F(y, Y) - F(x, X) = \int_0^1 F_x\big(.,.\big)(y-x)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 F_X\big(.,.\big)(Y-X)\,\mathrm{d}t$$

e in particolare

$$X^{x+y} - X^x = F\big(x+y, X^{x+y}\big) - F\big(x, X^x\big) =$$

$$= \int_0^1 F_x\big(.,.\big)\, y\,\mathrm{d}t + \int_0^1 F_X\big(.,.\big)(X^{x+y} - X^x)\,\mathrm{d}t$$

Definiamo l'operatore $G_y = \int_0^1 F_X\big(x + ty\, ,\, (1-t)X^x + tX^{x+y}\big)\,\mathrm{d}t$ : si constata facilmente che $G_y \in \mathcal{L}(B, B)$ , che $\big\|G_y\big\|_{\mathcal{L}(B,B)} \leq K$ , che l'applicazione $y \to G_y$ è continua e che, per ogni $Z \in B$ , $\lim_{y \to 0} G_y\, Z = F_X\big(x, X^x\big)\, Z$ .

Inoltre, poichè $\big\|G_y\big\| \leq K$ , è definito $\big(I - G_y\big)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} G_y^n$ .

L'eguaglianza sopra scritta si può riscrivere

$$X^{x+y} - X^x = G_y\big(X^{x+y} - X^x\big) + y \int_0^1 F_x\big(x + ty\, ,\, (1-t)X^x + tX^{x+y}\big)\,\mathrm{d}t$$

Questa eguaglianza diventa

$$\frac{X^{x+y} - X^x}{y} = \big(I - G_y\big)^{-1}\Big(\int_0^1 F_x\big(x + ty, (1-t)X^x + tX^{x+y}\big)\,\mathrm{d}t\Big)$$

Da questo punto è facile verificare che esiste

$$\frac{\partial X^x}{\partial x} = \lim_{y\to 0} \frac{X^{x+y} - X^x}{y} = \big(I - F_X(x, X^x)\big)^{-1} F_x(x, X^x)$$

e questa equazione equivale alla tesi.

□

Come facile conseguenza di questo lemma (ricordando che assumiamo sempre che esistano $a_x(.,.)$ e $b_x(.,)$ e che siano uniformemente limitate) si ottiene il seguente risultato che caratterizza il processo *variazione prima*:

**Teorema 3.2.4.** *Denotata $X^x$ la soluzione dell'equazione 3.1.1 con dato iniziale $X_0^x = x$ , l'applicazione $x \to X^x_{\cdot}$ (vista come applicazione da $\mathbb{R}$ in $\mathcal{S}$ ) è derivabile e, indicando $Y^x = \frac{\partial X^x}{\partial x}$ , questa è la soluzione dell'equazione*

$$\begin{cases} dY_t^x = a_x(t, X_t^x)\, Y_t^x\, \mathrm{d}t + b_x(t, X_t^x) Y_t^x\, \mathrm{d}W_t \\ Y_0^x = 1 \end{cases}$$

*Dimostrazione.* Con le notazioni del Lemma 3.2.3, lo spazio di Banach $B$ è $\mathcal{S}$ e l'applicazione $F(x, X)$ è l'elemento di $\mathcal{S}$

$$F(x, X)_t = x + \int_0^t a(s, X_s)\, \mathrm{d}s + \int_0^t b(s, X_s)\, \mathrm{d}W_s$$

È facile constatare che $F_x(x, Y) = 1$ , che $F_X(x, X)\, Y = \int_0^T a_x(s, X_s)\, Y_s\, \mathrm{d}s + \int_0^T b_x(s, X_s)\, Y_s\, \mathrm{d}W_s$ e che sono soddisfatte le ipotesi di 3.2.4.

Per essere precisi, l'applicazione $F(x, X)$ è una contrazione su un opportuno intervallo $[0, T_1]$ ; poi si riparte da $T_1$ considerando l'applicazione

$$X_{\cdot} \to X_{T_1}^x + \int_{T_1}^t a(s, X_s)\, \mathrm{d}s + \int_{T_1}^t b(s, X_s)\, \mathrm{d}W_s$$

e con un numero finito di passi si ottiene il risultato su tutto l'intervallo temporale $[0, T]$ .

□

## 3.3 Formula di Bismut-Ly-Elworthy e applicazioni

Torniamo alla soluzione $X_t^x$ dell'equazione 3.1.1 e indichiamo $Y_t^x$ il processo di *prima variazione*: quando non c'è pericolo di ambiguità eliminiamo, per abbreviare le formule, il termine soprascritto $x$ nella soluzione dell'equazione e ricordiamo che si ha $D_s X_T = b(s, X_s)\, Y_s^{-1}\, Y_T$ : supponiamo che si abbia $b(s,x) \geq b > 0$ e notiamo che, qualunque sia $0 \leq s \leq T$ , si ha $Y_T = \dfrac{Y_s\, D_s X_T}{b(s, X_s)}$ e quindi, presa $a(s)$ boreliana con $\int_0^T a(s)\, \mathrm{d}s = 1$ , si ottine

$$Y_T = \int_0^T a(s)\, \frac{Y_s\, D_s X_T}{b(s, X_s)}\, \mathrm{d}s$$

**Teorema 3.3.1 (Formula di Bismut-Ly-Elworthy).** *Sia* $G \in \mathbb{D}^{1,2}$ *e supponiamo che* $a(s)\dfrac{G\, Y_s}{b(s, X_s)}$ *appartenga al dominio di* $\delta$ *; sia inoltre* $\Phi$ *di classe* $\mathcal{C}^1$ *con* $|\Phi(x)| + |\Phi'(x)| \leq C(1 + |x|)$ *. Allora vale la formula*

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{E}\big[\phi(X_T^x)\, G\big] = \mathbf{E}\big[\Phi(X_T^x)\big( \int_0^T \frac{a(s)\, G\, Y_s^x}{b(s, X_s^x)}\, \delta W_s\big)\big] =$$

$$= \mathbf{E}\Big[\Phi(X_T^x)\Big(G \int_0^T \frac{Y_s^x}{b(s, X_s^x)}\, a(s)\, \mathrm{d}W_s - \int_0^T \frac{D_s G\, Y_s^x}{b(s, X_s^x)}\, a(s)\, \mathrm{d}s\Big)\Big]$$

*Dimostrazione.* La proprietà di derivabilità rispetto ad $x$ della v.a. $X_T^x$ permette di derivare dentro l'integrale e si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{E}\big[\Phi(X_T^x)\, G\big] = \mathbf{E}\big[\Phi'(X_T^x)\, Y_T^x\, G\big] = \mathbf{E}\big[G\, \Phi'(X_T^x) \int_0^T \frac{D_s X_T^x\, Y_s^x}{b(s, X_s^x)}\, a(s)\, \mathrm{d}s\big] =$$

$$\mathbf{E}\Big[\int_0^T D_s \Phi(X_T^x)\, \frac{Y_s^x}{b(s, X_s^x)}\, a(s)\, G\, \mathrm{d}s\Big] = \mathbf{E}\Big[\Phi(X_T^x)\Big( \int_0^T \frac{Y_s^x}{b(s, X_s^x)}\, a(s)\, G\, \delta W_s\Big)\Big]$$

□

In base al Teorema 2.3.2, una condizione sufficiente per la validità della formula 3.3.1 è che si abbia

$$\mathbf{E}\Big[G^2\Big( \int_0^T \frac{Y_s}{b(s, X_s)}\, a(s)\, \mathrm{d}W_s\Big)^2 + \Big( \int_0^T D_s G\, \frac{Y_s}{b(s, X_s)}\, a(s)\, \mathrm{d}s\Big)^2\Big] < +\infty$$

Utilizzando il linguaggio del Capitolo 1, abbiamo ottenuto una *formula di integrazione per parti*

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{E}\big[\Phi(X_T^x)\, G\big] = \mathbf{E}\big[(\partial_x \Phi)(X_T^x)\, Y_T^x G\big] = \mathbf{E}\big[\Phi(X_T^x)\, H_1(X_T^x\, ,\, Y_T^x G)\big]$$

Consideriamo in particolare l'equazione

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{E}\big[\Phi(X_T^x)\, G\big] = \mathbf{E}\big[\Phi(X_T^x)\, H_1(X_T^x\, ,\, Y_T^x G)\big] \tag{3.3.1}$$

e notiamo che il *peso* $H_1(X_T^x, Y_T^x G)$ che interviene nella formula 3.3.1 non dipende dalla funzione $\Phi$: in particolare la formula rimane vera se $\Phi$ è solo lipschitziana (anche se non ha senso in questo caso $(\partial_x \Phi)(X_T^x)$ ) e più in generale è facile provare (con opportune approssimazioni con funzioni $\mathcal{C}^1$) che è soddisfatta ad esempio anche per la funzione $\Phi(x) = I_{\{x \geq k\}}$.

**Esempio 3.3.2.** Consideriamo un'equazione della forma

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t^x = \sigma(t)\, X_t^x \,\mathrm{d}W_t \\ X_0^x = x \end{cases}$$

dove $\sigma(t)$ è una funzione deterministica.

In questo caso l'equazione del processo *prima variazione* è data da

$$\begin{cases} \mathrm{d}Y_t = \sigma(t)\, Y_t \,\mathrm{d}W_t \\ Y_0 = 1 \end{cases}$$

ed è facile verificare che si ha $X_t^x = x\, Y_t$. Prendendo come $a(t)$ la funzione costante $1/T$ si ottiene (se $1/\sigma(s) \in L^2(0,T)$ )

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{E}\big[\Phi(X_T^x)\big] = \mathbf{E}\big[\Phi(X_T^x)\big(\frac{1}{T}\int_0^T \frac{\mathrm{d}\,W_s}{x\,\sigma(s)}\big)\big] = \mathbf{E}\big[\Phi(X_T^x)\frac{W(1/\sigma)}{T\,x}\big]$$

Si può ripetere la derivazione (è sufficiente che $\Phi$ sia di classe $\mathcal{C}^1$, non occorre che sia $\mathcal{C}^2$ ) e si ottiene

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathbf{E}\big[\Phi(X_T^x)\big] = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{E}\Big[\Phi(X_T^x)\,\frac{W(1/\sigma)}{T\,x}\Big] =$$

$$= \mathbf{E}\Big[\Phi(X_T^x)\Big(-\frac{W(1/\sigma)}{T\,x^2} + \frac{W(1/\sigma)}{T\,x}.\frac{1}{T}\int_0^T \frac{\mathrm{d}\,W_s}{x\,\sigma(s)} - \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{T\,x\,\sigma(s)}.\frac{\mathrm{d}s}{x\,\sigma(s)}\Big)\Big] =$$

$$= \mathbf{E}\Big[\Phi(X_T^x)\Big(\frac{-W(1/\sigma)}{T\,x^2} + \frac{W(1/\sigma)^2}{T^2x^2} - \frac{1}{T^2x^2}\int_0^T \frac{\mathrm{d}s}{\sigma^2(s)}\Big)\Big]$$

Consideriamo ora $\sigma$ costante e deriviamo rispetto a $\sigma$: in tal caso il processo $X_t^x$ è dato da $X_t^x = x \exp\big(\sigma\, W_t - \frac{\sigma^2}{2}T\big)$ e si ha

$$\frac{\partial X_T^x}{\partial \sigma} = x\,\exp(\dots)\big(W_T - \sigma\, T\big) = \frac{\partial X_T^x}{\partial x}\, x\,\big(W_T - \sigma T\big)$$

Si ottiene pertanto

$$\frac{\partial}{\partial \sigma}\mathbf{E}\big[\Phi(X_T^x)\big] = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{E}\big[\Phi(X_T^x)\,\sigma\,\big(W_T - \sigma\, T\big)\big]$$

e ci si riporta ai conti precedenti.