"MATEMATICA" – A.A. 1999/2000 – Scritto del 2/9/00

Esercizio 1. Si consideri l'equazione differenziale $(x')^2 + tx' - x = 0$.

A [4 punti] Si dimostri che nessun polinomio di grado maggiore di 2 può risolvere l'equazione.

B [3 punti] Si trovino tutti i polinomi a coefficienti reali che risolvono l'equazione.

C [4 punti] Si dimostri che l'equazione ammette una soluzione locale non sempre nulla tale che $x(1) = 0$, e si dica se tale soluzione sia crescente nell'intorno di 1.

D [4 punti] Si determinino tutte le coppie (t_0, x_0) tali che esiste dell'equazione una soluzione globale x tale che $x(t_0) = x_0$. [Suggerimento: si calcoli $x'(t_0)$, e si cerchino le rette che passano per (t_0, x_0) e risolvono l'equazione.]

Esercizio 2.
Siano $\ell = \{t \in \mathbb{R},\ t \leq 0\}$ e $\Omega = \mathbb{C} \setminus \ell$.

A [3 punti] Sia $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Si determini il raggio di convergenza dello sviluppo in serie di potenze di f centrato nel punto $i \in \Omega$.

B [3 punti] Si dimostri che esiste $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tale che $\exp(f(z)) = z$ per ogni z in Ω.

C [3 punti] Data f come nel punto precedente, si calcoli $\lim_{t \to 0^+}(f(-1+it) - f(-1-it))$.

D [3 punti] Se $f(z) = \frac{g(z)}{z(z+1)(z+2)(z+3)}$ con $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, si ponga $\phi(r) = \int_{\partial\Delta_r} f(z)\,\mathrm{d}z$. Si dica per quali r la $\phi(r)$ sia definita. Si dica inoltre quanti valori diversi la ϕ può assumere.

E [3 punti] Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ di classe C^1 tale che $f|_\Omega \in \mathcal{H}(\Omega)$ e $f|_\ell \equiv 0$. Si dimostri che $f \equiv 0$. Vale la stessa conclusione supponendo solo f continua?

Durante la prova deve essere esibito il libretto universitario o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti, una penna, ed un foglio manoscritto contenente formule ed enunciati. Consegnando lo scritto si perde il diritto a ottenere la registrazione del voto conseguito nei quiz. Se si consegna lo scritto e la media dei voti di quiz e scritto è meno di 16, bisogna ripetere il quiz.