"MATEMATICA" – A.A. 1999/2000 – Scritto del 12/2/2000

Esercizio 1. Per $a, b, c \in \mathbb{R}$ si consideri l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{(bx - i)(cx - i)}\, \mathrm{d}x.$$

(a) [3 punti] Si dimostri che per $b \neq 0, c \neq 0$ l'integrale converge;

(b) [3 punti] Si calcoli l'integrale per $a = 0, b > 0, c > 0$ e per $a = 0, b < 0, c < 0$;

(c) [3 punti] Si calcoli l'integrale per $a = 0, b > 0, c < 0$;

(d) [2 punti] Per $a = 0, b = 1, c = 0$ si discuta la converza dell'integrale, nel senso ordinario e nel senso della parte principale;

(e) [2 punti] Si calcoli l'integrale per $a = 1, b = 1, c = -1$, specificando il significato del risultato;

(f) [2 punti] Si calcoli l'integrale per $a = 1, b = 1, c = 0$, specificando il significato del risultato.

Esercizio 2. Sia $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 > 0\}$ e consideri in Ω la seguente 1-forma dipendente da un parametro $k \in \mathbb{R}$:

$$\omega_k(x, y, z) = k \cdot \frac{-y\, \mathrm{d}x + x\, \mathrm{d}y}{x^2 + y^2} + (1 - k^2) \cdot \frac{x\, \mathrm{d}x}{x^2 + y^2} + \mathrm{d}z.$$

(a) [4 punti] Si dica per quali k la ω_k sia chiusa.

(b) [8 punti] Si calcoli l'integrale di ω_k su ciascuna delle seguenti curve:

$$\gamma_1(t) = (1, 0, t), \qquad \gamma_2(t) = (1 + t, 0, 0),$$

$$\gamma_3(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), 0), \qquad \gamma_4(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), \cos^2(10\pi t)\, \mathrm{e}^{6\pi t})$$

tutte definite per $t \in [0, 1]$;

(c) [3 punti] Si dica per quali k la ω_k sia esatta.