UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale e Edile

# Modulo di "Geometria" — Scritto del 25/7/24 — Quesiti

**Nome** ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

**1.** Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ risulta diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ la matrice $\begin{pmatrix} k^2-k-2 & k+2 \\ k^2-4 & 4 \end{pmatrix}$.

**2.** Al variare di $k \in \mathbb{R}$ determinare il tipo affine della quadrica di equazione $kx^2 + (k+1)y^2 + z^2 + (k-1) = 0$.

**3.** Esibire oppure provare che non esistono due sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}^5(\mathbb{R})$ entrambi di dimensione 3 e che si intersecano in un sottospazio di dimensione 1.

**4.** In $\mathbb{R}^2$ calcolare l'angolo compreso tra i vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

**5.** Dire per quali $z \in \mathbb{C}$ la matrice $\begin{pmatrix} 3 & z \\ 5-2i & -1 \end{pmatrix}$ ha autovalori reali e una base ortonormale di autovettori.

**6.** Per la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da $f(x,y) = \mathrm{e}^{x^2-3y^2}$ determinare la matrice hessiana nel punto $(1,1)$ e i segni dei suoi autovalori.

**7.** Calcolare $\displaystyle\int_\alpha xy^2 \cdot \mathrm{e}^{x^2y^3}(2y\,\mathrm{d}x + 3x\,\mathrm{d}y)$ con $\alpha : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} t^4 \\ t^5 \end{pmatrix}$.

**Le risposte devono essere sinteticamente giustificate**

Deve essere esibito un documento o la tessera dello studente. I telefoni devono rimanere spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♡ 2. ♠ 3. ♢ 4. ♣ 5. ♠ 6. ♢ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♢ 10. ♣

**Modulo di "Geometria"** — Scritto del 25/7/24 — Esercizî

**1.** Considerare le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2-i \\ 2+i & -4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3i & 1+5i \\ -1+5i & -2i \end{pmatrix},\ C = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2+3i & -\sqrt{3} \\ i\sqrt{3} & 3+2i \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1+3i & 3+i \\ \sqrt{6}-2i & 1+3i \end{pmatrix}.$$

(A) (3 punti) Provare che $A$ ha autovalori reali ed esiste una base ortonormale di $\mathbb{C}^2$ costituita da autovettori di $A$.

(B) (3 punti) Provare che $B$ ha autovalori immaginari puri ed esiste una base ortonormale di $\mathbb{C}^2$ costituita da autovettori di $B$.

(C) (3 punti) Provare che $C$ ha autovalori di modulo 1 ed esiste una base ortonormale di $\mathbb{C}^2$ costituita da autovettori di $C$.

(D) (3 punti) Provare che esiste una base ortonormale di $\mathbb{C}^2$ costituita da autovettori di $D$.

**2.** Considerare la curva orientata $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 5t + \sin(t) \\ t - 2\cos(t) \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Provare che $\alpha$ è regolare.

(B) (4 punti) Calcolare la curvatura di $\alpha$ nel punto $t = 0$.

(C) (3 punti) Provare che esitono infiniti $n \in \mathbb{N}$ tali che la curvatura di $\alpha$ nel punto $t = n\pi$ è positiva, e infiniti in cui è negativa.

(D) (3 punti) Calcolare $\displaystyle\int_\beta y\,\mathrm{d}x$ dove $\beta$ è la restrizione di $\alpha$ a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.



1. ♡ 2. ♠ 3. ♢ 4. ♣ 5. ♠ 6. ♢ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♢ 10. ♣

# Risposte ai quesiti

## 3. $\diamondsuit$

**1.** $k \neq 1$

**2.** Degenere per $k = -1, 0, 1$;
iperboloide ellittico (a due falde) per $k < -1$;
iperboloide iperbolico (a una falda) per $-1 < k < 0$;
ellissoide per $0 < k < 1$;
vuoto per $k > 1$

**3.** Presi in $\mathbb{R}^6$ i sottospazi vettoriali

$$W_1 = \mathrm{Span}(e_1, e_2, e_3, e_4) \qquad W_2 = \mathrm{Span}(e_1, e_2, e_5, e_6)$$

basta prendere l'immagine in $\mathbb{P}^5(\mathbb{R})$ di $W_1 \setminus \{0\}$ e $W_2 \setminus \{0\}$

**4.** $\frac{\pi}{6}$

**5.** $z = 5 + 2i$

**6.** $\mathrm{e}^{-2} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ -12 & 30 \end{pmatrix}$; positivi

**7.** $\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1}$

# Soluzioni degli esercizî

## 3. ♢

**1.**

(A) $A$ è hermitiana

(B) $B$ è antihermitiana

(C) $C$ è unitaria

(D) $D$ è normale

**2.**

(A) La seconda componente di $\alpha'(t)$ si annulla per $t = -\frac{1}{6}\pi + 2k\pi$ e per $t = -\frac{5}{6}\pi + 2k\pi$, in cui non si annulla la prima

(B) $-\frac{10}{17\sqrt{17}}$

(C) $\det(\alpha'(t), \alpha''(t)) = 2(2t-5)\cos(t) - 3\sin(t)$ in $t = n\pi$ è positivo per $n$ pari non nullo e negativo per $n$ nullo o dispari

(D) $\frac{1}{6}\pi^3 - \pi + 20$