Modulo di "Geometria" — Scritto del 25/6/24 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Se $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$ e $p_A(1+2i) = p_A(3-i) = 0$ si può concludere che A è diagonalizzabile oppure che non lo è? Spiegare.

2. Dire se la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ sia diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ o no. Spiegare.

3. In $\mathbb{R}^2$ considerare il prodotto scalare $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ con $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ e la norma associata. Trovare tutti i vettori ortogonali a $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ rispetto a tale prodotto scalare e unitari rispetto a tale norma.

4. Provare che $\begin{pmatrix} 2i & 3+i \\ -3+i & -i \end{pmatrix}$ ammette una base ortonormale di autovettori, ed esibirla.

5. Determinare il tipo affine della quadrica di equazione
$5x^2 + 2y^2 + 10z^2 - 2xy - 4xz - 6yz + 2x - 2y + 3 = 0$.

6. In $\mathbb{R}^2$ considerare la retta di equazione $4x - 3y + 7 = 0$ e, per $t \in \mathbb{R}$, quella passante per i punti $\begin{pmatrix} 5 \\ t \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} t+1 \\ 2t-1 \end{pmatrix}$. Stabilire per quali t i loro completamenti in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ si incontrano all'infinito.

7. Calcolare $\displaystyle\int_{\partial R} \left(\left(y + e^{x^5}\right) dx + \left(\log\left(1+y^3\right) - x\right) dy\right)$ dove $R = [-1,1] \times [0,1]$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito un documento o la tessera dello studente. I telefoni devono rimanere spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♡ 2. ♠ 3. ♢ 4. ♣ 5. ♠ 6. ♢ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♢ 10. ♣

Modulo di "Geometria" — Scritto del 25/6/24 — Esercizî

1. In $\mathbb{R}^3$ considerare il sottospazio W di equazione $x = 3y + 5z$ e, al variare di k in $\mathbb{R}$, l'espressione

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2k+1)x + (8-k)y + 3(4-k)z \\ -kx - 2(k+4)y - (k+11)z \\ (k+1)x + (k+4)y + 5z \end{pmatrix}.$$

(A) (3 punti) Provare che essa definisce per ogni k un'applicazione lineare $f : W \to W$.

(B) (3 punti) Verificare che $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ è una base di W e provare che la matrice che rappresenta f rispetto a $\mathcal{B}$ sia in partenza sia in arrivo è $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -5k-8 & -6k-11 \\ 4k+7 & 5k+10 \end{pmatrix}$.

(C) (3 punti) Al variare di k determinare gli autovalori di f (come applicazione da W in sé) con la loro moteplicità algebrica e geometrica e discutere la diagonalizzabilità di f.

(D) (3 punti) Per $k = 1$ trovare gli autovalori di f (come applicazione da W in sé) e una base di W che la diagonalizza.

2. Considerare la curva $\alpha : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}^3$ data da $\quad \alpha(s) = \begin{pmatrix} 2s - \log(1+s) \\ s + \cos(s) \\ s^2 - s^3 \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Provare che α è regolare e semplice.

(B) (3 punti) Trovare il riferimento di Frénet di α nel punto $s = 0$.

(C) (4 punti) Calcolare curvatura e torsione di α nel punto $s = 0$.

(D) (3 punti) Calcolare $\displaystyle\int_\beta (z\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}z)$ dove β à la restrizione di α a $[0, 2]$.

Risposte ai quesiti

3. ♢

1. Non si può concludere nulla: $A = \begin{pmatrix} 1+2i & 0 & 0 \\ 0 & 3-i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $A = \begin{pmatrix} 1+2i & 0 & 0 \\ 0 & 3-i & 1 \\ 0 & 0 & 3-i \end{pmatrix}$ soddisfano l'ipotesi ma la prima è diagonale e la seconda non è diagonalizzabile

2. No perché ha l'autovalore 1 con molteplicità algebrica 3 e geometrica 1

3. $\pm\frac{1}{2\sqrt{11}}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

4. È antihermitiana; $u_1 = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 3+i \\ 2i \end{pmatrix}$, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 2i \\ 3-i \end{pmatrix}$

5. Insieme vuoto

6. $t = 13$

7. -4

Soluzioni degli eserciziî

3. $\diamondsuit$

1.

(A) Sia $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice $M = \begin{pmatrix} 2k+1 & 8-k & 3(4-k) \\ -k & -2(k+4) & -(k+11) \\ k+1 & k+4 & 5 \end{pmatrix}$.

L'equazione di W si scrive come $w \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$, dove $w = (-1, 3, 5)$. Poiché $w \cdot M = -4w$ si ha che $g(W) \subseteq W$, dunque restringendo g sia in partenza sia in arrivo a W si ottiene la f lineare desiderata

(B) I vettori v_1 e v_2 che costituiscono $\mathcal{B}$ appartengono a W e sono linearmente indipendenti; eseguendo i calcoli si trova che

$$M \cdot v_1 = (-5k-8)v_1 + (4k+7)v_2 \qquad M \cdot v_2 = (-6k-11)v_1 + (5k+10)v_2$$

(C) Per $k \neq -2$ autovalori $k+3$ e $-k-1$ con molteplicità algebrica e geometrica 1, f diagonalizzabile; per $k = -2$ autovalore 1 con molteplicità algebrica 2 e geometrica 1, f non diagonalizzabile

(D) $\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = -2,\ w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ w_2 = \begin{pmatrix} 16 \\ -13 \\ 11 \end{pmatrix}$

2.

(A) $X'(s) = 0$ solo per $s = -\frac{1}{2}$ ma $Z'(-\frac{1}{2}) = -\frac{7}{4} \neq 0$.
$Y'(s)$ è sempre non negativa e ha zeri isolati, dunque Y è crescente

(B) $t = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ n = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},\ b = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(C) $\kappa = \sqrt{\frac{3}{2}},\ \tau = \frac{2}{3}$

(D) $4\log(3) - 16$

---

1. ♡ 2. ♠ 3. ♢ 4. ♣ 5. ♠ 6. ♢ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♢ 10. ♣
