UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale e Edile

Modulo di "Geometria" — Scritto del 4/6/24 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Trovare gli autovalori della matrice $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e una base di $\mathbb{R}^2$ che la diagonalizza.

2. Trovare $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui esiste $M \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ ortogonale con

$$ {}^{\mathrm{t}}M \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot M = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. $$

3. Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ la retta di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ passante per i punti $[t:1:7]$ e $[1:-3:t+1]$ contiene il punto $[1:-2:4]$.

4. Determinare il tipo affine della quadrica di equazione $3y^2 + z^2 - 6xy + 2xz - 4yz + 6x - 3 = 0$.

5. Calcolare $\int_\alpha y^2$ dove $\alpha : [1,2] \to \mathbb{R}^2$ è data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} \ln(t) \\ t^2 \end{pmatrix}$.
(Non è necessario semplificare l'espressione numerica del risultato.)

6. Per la curva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} t^2 + \mathrm{e}^t \\ t^2 - \mathrm{e}^t \end{pmatrix}$
calcolare per ogni t il segno della curvatura nel punto $\alpha(t)$.

7. Per la curva $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} -t \\ 1 - t^2 \end{pmatrix}$ calcolare $\int_\alpha \frac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{x^2 + y^2}$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito un documento o la tessera dello studente. I telefoni devono rimanere spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♡ 2. ♠ 3. ♢ 4. ♣ 5. ♠ 6. ♢ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♢ 10. ♣

Modulo di "Geometria" — Scritto del 4/6/24 — Esercizî

1. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considerare la matrice

$$N = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -\frac{1}{5}(k^2+1) \\ 4 & 6 & -3 \\ \frac{1}{5}(k-7) & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

(A) (3 punti) Trovare i due valori di k per i quali esiste $M \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ ortogonale con ${}^{\mathrm{t}}M \cdot N \cdot M$ diagonale.

(B) (3 punti) Trovare l'unico valore di k per il quale l'applicazione bilineare $\langle \cdot | \cdot \rangle_N$ su $\mathbb{R}^3$ associata ad N è un prodotto scalare.

(C) (3 punti) Per il valore di k del punto (B) trovare una base del sottospazio ortogonale rispetto a $\langle \cdot | \cdot \rangle_N$ al vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(D) (3 punti) Per il valore di k del punto (A) e non del punto (B) trovare i segni degli autovalori di N.

2. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considerare la matrice

$$A = \begin{pmatrix} k^2-k+3 & k+1 \\ -2k^2-2k & 1-4k \end{pmatrix}.$$

(A) (3 punti) Sapendo che A ha sempre l'autovalore $3-2k$, trovare l'altro.

(B) (3 punti) Provare che $\det(A) = -2k^3+9k^2-11k+3$.

(C) (3 punti) Trovare i valori di k per i quali gli autovalori di A non sono distinti.

(D) (3 punti) Trovare i valori di k per i quali A è diagonalizzabile.

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale e Edile

Modulo di "Geometria" — Scritto del 4/6/24 — Quesiti

Risposte ai quesiti

3. $\diamondsuit$

1. $\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = -1,\ v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

2. $\lambda = \pm 3$

3. $t = \frac{1}{2}$ e $t = 4$

4. Paraboloide iperbolico

5. $\frac{1}{24}\left(65^{\frac{3}{2}} - 5^{\frac{3}{2}}\right)$

6. Positivo per $t < 1$, nullo per $t = 1$, negativo per $t > 1$

7. $\frac{\pi}{2}$

1. $\heartsuit$ 2. $\spadesuit$ 3. $\diamondsuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\spadesuit$ 6. $\diamondsuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\diamondsuit$ 10. $\clubsuit$

Soluzioni degli esercizî

3. $\diamondsuit$

1.

(A) $k = -3$ e $k = 2$

(B) $k = -3$

(C) $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

(D) Due positivi e uno negativo

2.

(A) $\mathrm{tr}(A) - (3-2k) = k^2 - 3k + 1$

(B) $\det(A) = (3-2k)\cdot(k^2-3k+1) = -2k^3 + 9k^2 - 11k + 3$

(C) $k = 2$ e $k = -1$

(D) $k \neq 2$