UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale e Edile

Modulo di "Geometria" — Scritto del 18/9/24 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Nello spazio $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare standard calcolare la proiezione ortogonale del vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sul piano Span $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

2. Dire per quali $z \in \mathbb{C}$ la matrice $\begin{pmatrix} z^2 & z+i \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ risulta diagonalizzabile.

3. Provare che la matrice $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & \sqrt{7} \\ \sqrt{7} & -3 \end{pmatrix}$ rappresenta una isometria di $\mathbb{R}^2$ e dire se è una rotazione o la riflessione rispetto a una retta.

4. Data $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ calcolare $p_A(t) = t^3 + \ldots$ sapendo che $\mathrm{tr}(A) = -5$, $\det(A) = -2$, $p_A(1) = 9$.

5. Al variare di $t \in \mathbb{R}$ determinare il tipo affine della conica di equazione $x^2 - 6xy + (t+7)y^2 + 2x - 4y = 0$.

6. Determinare l'intersezione in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ dei luoghi
$\{[-t-1 : 10 : 6] : \ t \in \mathbb{R}\}$ e $\{[t : 1-3t : -3] : \ t \in \mathbb{R}\}$.

7. Per la curva orientata $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} t + \cos(2t) \\ t^2 - \sin(t) \end{pmatrix}$ calcolare la curvatura nel punto $t = 0$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito un documento o la tessera dello studente. I telefoni devono rimanere spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♡ 2. ♠ 3. ♢ 4. ♣ 5. ♠ 6. ♢ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♢ 10. ♣

Modulo di "Geometria" — Scritto del 18/9/24 — Esercizî

1. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considerare la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-k^2 \\ -k-1 & -k & k^2-1 \\ 2k-1 & k & k^2+k-1 \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Provare che $\det(M) = -k^4$.

(B) (2 punti) Sapendo che M ha sempre l'autovalore k^2, trovare gli altri.

(C) (3 punti) Determinare i valori di k per cui M non ha tre autovalori distinti.

(D) (5 punti) Determinare i valori di k per cui M non è diagonalizzabile.

2. Considerare la curva orientata $\alpha : (0, +\infty) \to \mathbb{R}^3$ data da $\alpha(s) = \begin{pmatrix} s^2 - \ln(s) \\ s + \frac{1}{s} \\ s^3 - 4s \end{pmatrix}$.

(A) (1 punto) Provare che α è regolare.

(B) (4 punti) Determinare il riferimento di Frénet di α nel punto $s = 1$.

(C) (4 punti) Calcolare curvatura e torsione di α nel punto $s = 1$.

(D) (3 punti) Calcolare $\displaystyle\int_\beta y \, \mathrm{d}x$ dove β è la restrizione di α a $[1, 2]$.

Deve essere esibito un documento o la tessera dello studente. I telefoni devono rimanere spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si possono consultare i libri di testo del corso, esclusivamente in originale e senza annotazioni. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

1. ♡ 2. ♠ 3. ♢ 4. ♣ 5. ♠ 6. ♢ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♢ 10. ♣

Risposte ai quesiti

3. ♢

1. $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

2. $z \neq i$

3. È ortogonale; la riflessione rispetto a una retta

4. $t^3 + 5t^2 + t + 2$

5. Iperbole per $t < 1$ e $1 < t < 2$; degenere (due rette incidenti) per $t = 1$; parabola per $t = 2$; ellisse per $t > 2$

6. $\{[-2 : 5 : 3]\}$

7. $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

Soluzioni degli esercizî

3. $\diamondsuit$

1.

(A) Sostituire la terza riga con sé stessa più due volte la prima più la seconda e sviluppare lungo la seconda colonna

(B) k e $-k$

(C) $-1,\ 0,\ 1$

(D) 0

2.

(A) La seconda componente di $\alpha'(s)$ si annulla solo per $s = 1$, dove non si annullano le altre due

(B) $t = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ n = \frac{1}{\sqrt{178}}\begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix},\ b = \frac{1}{\sqrt{89}}\begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ 2 \end{pmatrix}$

(C) $\kappa = \frac{\sqrt{89}}{2\sqrt{2}},\ \tau = \frac{62}{89}$

(D) $\frac{31}{6}$