



1. Calcolare $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx$. (Suggerimento: operare la sostituzione $t = \sqrt{1+x}$.)

2. Calcolare $\int_D e^{x^2+y^2} dx dy$ dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

(Suggerimento: operare un cambio di coordinate usando quelle polari.)

3. Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare associata alla matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$. Calcolare $f^{-1}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$.

4. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $y' = \frac{\cos(\frac{x}{2})}{3y}$ che soddisfa $y(\pi) = 1$.

5. Calcolare la misura dell'angolo convesso compreso tra i vettori $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ di \mathbb{R}^4 .

6. Calcolare $\begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibita la tessera dello studente o un documento. I telefoni devono rimanere spenti. Le risposte ai quesiti vanno scritte negli spazi bianchi di questo foglio. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato dopo i primi 45 minuti. Prima della consegna non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Sul banco è consentito avere solo i libri di testo in originale, i fogli forniti e la cancelleria.



Considerare al variare di $k \in \mathbb{R}$ il sistema lineare

$$\begin{cases} x + 2z = k \\ x + (k + 1)y - z = 2 \\ kx + 2y - 3z = 4. \end{cases}$$

- (A) (2 punti) Risolvere il sistema per $k = 1$.
- (B) (1 punto) Calcolare in funzione di k il determinante della matrice incompleta del sistema.
- (C) (1 punto) Verificare che ci sono due valori di k , uno intero e uno no, per cui tale determinante è nullo.
- (D) (3 punti) Provare che per il valore intero di k del punto (C) il sistema ha infinite soluzioni, e trovarle.
- (E) (2 punti) Provare che per il valore non intero di k del punto (C) il sistema è impossibile.

Deve essere esibito un documento o la tessera dello studente. I telefoni devono rimanere spenti. Sul tavolo è consentito avere solo solo i libri di testo in originale, i fogli forniti e la cancelleria. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto dell'esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.



Risposte ai quesiti

1. $\frac{2}{3}(2 - \sqrt{2})$

2. $\pi(e^4 - 1)$

3. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

4. $y = \sqrt{\frac{4}{3} \sin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{3}}$

5. $\frac{\pi}{4}$

6. $\begin{pmatrix} 11 & -4 \\ -12 & -2 \end{pmatrix}$



Soluzione dell'esercizio

$$(A) \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$(B) -2k^2 - 5k + 3 = -(k + 3)(2k - 1)$$

$$(C) k = -3 \text{ e } k = \frac{1}{2}$$

$$(D) \begin{cases} x = 4t - 1 \\ y = 3t - 1 \\ z = -2t - 1 \end{cases}$$

(E) Dalla prima equazione si ricava $x = \frac{1}{2} - 2z$; sostituendo nella seconda e nella terza si trova, dopo qualche semplificazione, rispettivamente $y - 2z = 1$ e $y - 2z = \frac{15}{8}$