ISTITUZIONI DI MATEMATICA I 14/03/2024

Programma di oggi: Esercizi della scheda n.7

2c $V=\mathbb{R}^3$ $v_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}$ $v_2=\begin{pmatrix}5\\0\\-1\end{pmatrix}$ $v_3=\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}$

- Cerco una combinazione lineare nulla: $t_1,t_2,t_3\in\mathbb{R}$ tali che $t_1v_1+t_2v_2+t_3v_3=0$ (vettore nullo).

$$\begin{pmatrix}t_1\\-2t_1\\4t_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5t_2\\0\\-t_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\3t_3\\2t_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases}t_1+5t_2=0\\-2t_1+3t_3=0\\4t_1-t_2+2t_3=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}t_1=-5t_2\\10t_2+3t_3=0\\-20t_2-t_2+2t_3=0\end{cases} \iff \begin{cases}t_1=-5t_2\\t_2=-3/10\,t_3\\-21\left(-\frac{3}{10}\right)t_3+2t_3=0\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}t_1=0\\ \Uparrow\\ t_2=0\\ \Uparrow\\ t_3=0\end{matrix}$$

Quindi: l'unica comb. lin. nulla di v_1, v_2, v_3 è quella banale ($t_1=t_2=t_3=0$) $\Rightarrow$ i 3 vettori sono lin. indipendenti.

- $\underbrace{\mathrm{span}(v_1, v_2, v_3)}_{\dim(\cdots)\,=\,3}$ $\subset V$ sottospazio $\longrightarrow$ $\dim \mathbb{R}^3 = 3$

$\dim(\cdots) = 3$ perché i generatori sono lin. indip.

$\Rightarrow \mathrm{span}(v_1, v_2, v_3) = V \Rightarrow$ sì: v_1, v_2, v_3 sono generatori di V.

3b $V = \mathbb{R}^4$ $\quad v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

- $\dim(\mathrm{span}(v_1, v_2, v_3)) =$
  - 0 escluso perché $v_i \neq 0$
  - 1 escluso perché i vettori non sono uno multiplo dell'altro
  - 2, 3 $\rightarrow$ possibili

In ogni caso,
$\dim(\cdots) < 4 = \dim V \Rightarrow$ v_1, v_2, v_3 non sono generatori di V.

- Cerco una comb. lineare nulla: $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2a + 7c = 0 \\ a + 3b + 2c = 0 \\ 2b - c = 0 \\ -a + b = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2b + 14b = 0 \\ b + 3b + 4b = 0 \Rightarrow b = 0 \\ c = 2b \\ a = b \end{cases}$$

$b = 0 \Downarrow c = 0, \; a = 0$

$\Leftrightarrow a = b = c = 0$. Quindi l'unica comb. lin. nulla è quella banale

$\Rightarrow$ v_1, v_2, v_3 sono lin. indip. (e $\dim(\mathrm{span}(v_1, v_2, v_3)) = 3$).

4a $V = \mathbb{R}[t]$ polinomi in t a coefficienti $\in \mathbb{R}$

$v_1 = -\frac{6}{5} + \frac{7}{15} t^3 \qquad v_2 = 4 - \frac{14}{9} t^3$

- Dip./indip. lineare: $\longrightarrow$ Cerco $a, b \in \mathbb{R}$ tc $a v_1 + b v_2 = 0$

  $\hookrightarrow$ o direttamente $\alpha \in \mathbb{R}$ tc $v_1 = \alpha v_2$

  (per coppie di vettori basta vedere se i due sono uno multiplo dell'altro o no).

$$v_1 = -\frac{6}{5} + \frac{7}{15} t^3 = \alpha v_2 = \alpha\left(4 - \frac{14}{9} t^3\right) \iff \begin{cases} -\frac{6}{5} = 4\alpha \\ \frac{7}{15} = -\alpha \frac{14}{9} \end{cases} \iff \alpha = -\frac{3}{10}$$

Conclusione: v_1 e v_2 sono lin. dipendenti

- Non sono generatori perché $\dim V = +\infty$.

5a $V = \mathbb{R}^n$, $W = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^{n} \left(\sqrt{j-1}\right) x_j = 0 \right\}$

numero reale

j-esima componente di x

Riscriviamo la condizione che caratterizza W:

$$x_2 + \sqrt{2}\, x_3 + \sqrt{3}\, x_4 + \dots + \sqrt{n-1}\, x_n = 0 \qquad (*)$$

Verifichiamo le proprietà di sottospazio vettoriale:

- $0 \overset{?}{\in} W$ sì perché $0 + \sqrt{2}\, 0 + \dots + \sqrt{n-1} \cdot 0 = 0$

- $w_1, w_2 \in W \overset{?}{\Longrightarrow} w_1 + w_2 \in W$ sì perché, poste z_i le componenti di $w_1 + w_2$, x_i le componenti di w_1 e y_i le componenti di w_2, vale

$$z_2 + \sqrt{2}\, z_3 + \dots + \sqrt{n-1}\, z_n = (x_2 + y_2) + \sqrt{2}\,(x_3 + y_3) + \dots + \sqrt{n-1}\,(x_n + y_n)$$

$$= \underbrace{(x_2 + \sqrt{2}\, x_3 + \dots + \sqrt{n-1}\, x_n)}_{w_1 \in W \Rightarrow 0} + \underbrace{(y_2 + \sqrt{2}\, y_3 + \dots + \sqrt{n-1}\, y_n)}_{w_2 \in W \Rightarrow 0} = 0$$

- $w \in W, \lambda \in \mathbb{R} \overset{?}{\Longrightarrow} \lambda w \in W$ sì perché poste x_i le componenti di w, si ha che le componenti di λw sono $\lambda \cdot x_i$ e

$$(\lambda x_2) + \sqrt{2}\,(\lambda x_3) + \dots + \sqrt{n-1}\,(\lambda x_n) = \lambda\, [\underbrace{x_2 + \sqrt{2}\, x_3 + \dots + \sqrt{n-1}\, x_n}_{w \in W \Rightarrow \, = 0}] = \lambda \cdot 0 = 0$$

Conclusione: W è un sottospazio vettoriale di V.

5_14/03

5c $\quad V = \mathbb{R}^n \qquad W = \left\{ x : \sum_{j=1}^{n} x_j^j = 0 \right\}$

$$W = \left\{ x : x_1 + x_2^2 + x_3^3 + \dots + x_n^n = 0 \right\} \quad (*)$$

Verifichiamo le proprietà di sottospazio vettoriale:

- $0 \in W$? sì perché $0 + 0^2 + 0^3 + \dots + 0^n = 0$
- $w \in W, \lambda \in \mathbb{R} \overset{?}{\Rightarrow} \lambda w \in W$

Siano x_i le componenti di $w \Rightarrow x_1 + x_2^2 + \dots + x_n^n = 0$

Sia $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow (\lambda x_1) + (\lambda x_2)^2 + \dots + (\lambda x_n)^2$

$$= \lambda x_1 + \lambda^2 x_2^2 + \lambda^3 x_3^3 + \dots + \lambda^n x_n^2$$

Non riusciamo a sfruttare la proprietà per concludere.

Intuiamo che la proprietà $(*)$ potrebbe non valere per i multipli di elementi di W. Per dimostrarlo dobbiamo esibire un controesempio: in $\mathbb{R}^2$,

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in W, \text{ ma } \quad 2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin W \quad \text{perché} \quad -2 + (2)^2 \neq 0.$$

Conclusione: W non è un sottosp. vettoriale di V.

6 - 14/03

5d $V = \mathbb{R}^n$, $W = \{x : x_1^2 = x_2^2\}$

Verifichiamo le proprietà di sottospazio vettoriale:

- $0 \overset{?}{\in} W$ sì perché $0^2 = 0^2$.
- $w_1, w_2 \in W \overset{?}{\Longrightarrow} w_1 + w_2 \in W$

Siano z_i le componenti di w_1+w_2, x_i le comp. di w_1 e y_i le comp. di w_2.

Per ipotesi $x_1^2 = x_2^2$ e $y_1^2 = y_2^2$.

Per il vettore somma abbiamo
$$\begin{aligned} z_1^2 &= (x_1+y_1)^2 = x_1^2 + y_1^2 + 2x_1y_1 \\ z_2^2 &= (x_2+y_2)^2 = x_2^2 + y_2^2 + 2x_2y_2 \end{aligned}$$

sono uguali — sono uguali — potrebbero essere diversi

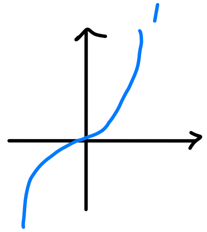
Esibiamo un controesempio: in $\mathbb{R}^2$

$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in W$, $w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in W$ ma $w_1 + w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \notin W$.

Conclusione: W non è un sottosp. vettoriale di V.

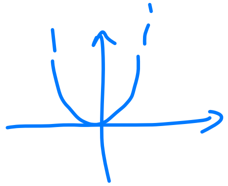
5e $V = \mathbb{R}^n$ $\quad W = \{x : x_1^3 = x_2^3\}$

Osserviamo che la funzione $t \mapsto t^3$ è iniettiva quindi $x_1^3 = x_2^3 \iff x_1 = x_2$.



$\Rightarrow \boxed{W = \{x : x_1 = x_2\}}.$

(Nell'es. precedente $x_1^2 = x_2^2 \iff x_1 = \pm x_2$
perché $t \mapsto t^2$ non è iniettiva



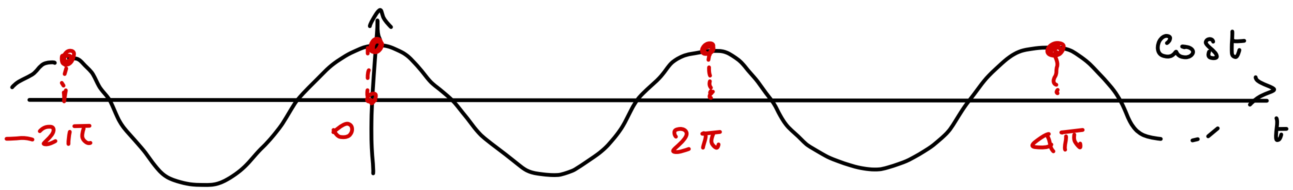
)

Si verifica facilmente che:

- $0 \in W$
- $w_1, w_2 \in W \Rightarrow w_1 + w_2 \in W$
- $w \in W,\ \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda w \in W$

$\Rightarrow$ W è un sottosp. vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

5f $V = \mathbb{R}^n$; $\quad W = \{x : \cos(x_1 + \dots + x_n) = 1\}$



$\Rightarrow \boxed{W = \{x : \underbrace{x_1 + \dots + x_n = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}}_{(*)}\}}$

8_14/03

Verifichiamo le proprietà di sottospazio:

- $0 \overset{?}{\in} W$ sì: la condizione (*) è verif. con $k=0$

  (o direttamente $\cos(0+\dots+0)=1$)

- $w_1, w_2 \in W \overset{?}{\Longrightarrow} w_1+w_2 \in W$

  sì perché poste z_i le componenti di w_1+w_2, x_i le componenti di w_1 e y_i le comp. di w_2, abbiamo

$$z_1+\dots+z_n = (x_1+y_1)+\dots+(x_n+y_n)$$
$$= \underbrace{(x_1+\dots+x_n)}_{\substack{\parallel \\ 2k\pi}} + \underbrace{(y_1+\dots+y_n)}_{2h\pi} = 2\underbrace{(k+h)}_{\in\mathbb{Z}}\pi$$

$w_1, w_2 \in W \Longrightarrow$ per qualche k ed h in $\mathbb{Z}$

(Si poteva dim. direttamente usando $\cos\alpha=1, \cos\beta=1 \Rightarrow \sin\alpha=0, \sin\beta=0$, $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta = 1\cdot1-0\cdot0=1$.)

- $w\in W, \lambda\in\mathbb{R} \overset{?}{\Longrightarrow} \lambda w\in W$ Falso perché: $x_1+\dots+x_n = 2k\pi$ con $k\in\mathbb{Z}$

$\Longrightarrow (\lambda x_1)+\dots+(\lambda x_n) = \lambda(x_1+\dots+x_n) = 2(\lambda k)\pi$ e λk non è necessariamente un numero intero.

(o direttamente: $\cos(\alpha)=0 \not\Rightarrow \cos(\lambda\alpha)=0$)

9_14/03

Controesempio: $w = \begin{pmatrix} 2\pi \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $\lambda = \sqrt{2}$.

Conclusione: W non è un sottosp. vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

6a $V = \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ matrici $m \times n$ a coeff. reali
(Ricordiamo che è uno s.v. con la somma tra matrici ed il prodotto con scalare; 0 qui indica la matrice nulla, con tutti zeri).

$$W = \{ A : A_{11} \cdot A_{mn} = 0 \}, \quad A \in V, \quad A = \underbrace{\begin{pmatrix} A_{11} & & \\ & & \\ & & A_{mn} \end{pmatrix}}_{n \text{ colonne}} \Big\} \, m \text{ righe}$$

Verifichiamo le proprietà di spazio vettoriale:

- $0 \overset{?}{\in} W$ sì $A_{11} = 0, \ A_{mn} = 0 \Rightarrow A_{11} \cdot A_{mn} = 0$
- $A \in W, \lambda \in \mathbb{R} \overset{?}{\Longrightarrow} \lambda A \in W$ sì perché $(\lambda A)_{11} \cdot (\lambda A)_{mn}$
$= \lambda A_{11} \cdot \lambda A_{mn}$
$= \lambda^2 \cdot 0 = 0$

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \lambda A_{12} & \cdots & \lambda A_{1n} \\ \lambda A_{21} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & & & \\ \lambda A_{m1} & \cdots & & \lambda A_{mn} \end{pmatrix}$$

10-14/03

- $A, B \in W \overset{?}{\Longrightarrow} A+B \in W$

No, perché $A, B \in W \Rightarrow A_{11} A_{mn} = 0, \quad B_{11} B_{mn} = 0$

$$(A+B)_{11} \cdot (A+B)_{mn} = (A_{11} + B_{11}) \cdot (A_{mn} + B_{mn})$$

$$= \underbrace{A_{11} \cdot A_{mn}}_{\overset{\text{ip.}}{=} 0} + \underbrace{B_{11} \cdot A_{mn} + A_{11} B_{mn}}_{?} + \underbrace{B_{11} B_{mn}}_{\overset{\text{ip.}}{=} 0}$$

Esibiamo un controesempio: $m = n = 2 \quad V = \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in W \quad \text{ma} \quad A+B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin W$$

prodotto $\neq 0$

$\Rightarrow$ W non è chiuso per somma

Conclusione: W non è un sottosp. vettoriale.

11-14/03

6b $V = \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $\quad W = \left\{ A : \sum_{j=1}^{\min(m,n)} A_{j,n+1-j} = 0 \right\}$

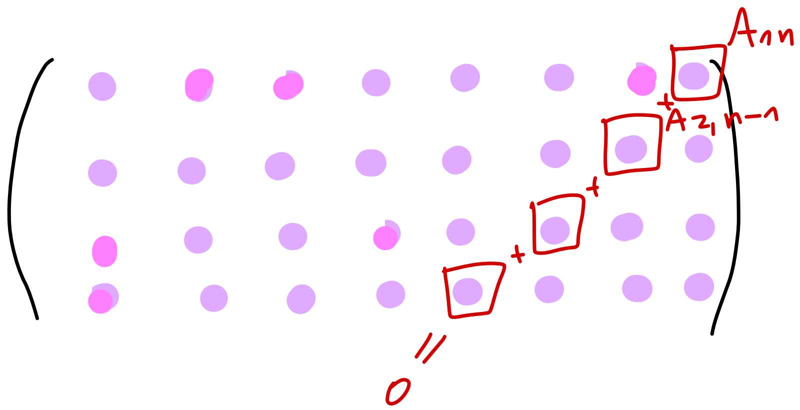
sia $\ell := \min(m,n)$

$$W = \left\{ A : \underbrace{A_{1,n} + A_{2,n-1} + A_{3,n-2} + \dots + A_{\ell,n+1-\ell}}_{(*)} = 0 \right\}$$

Cioè la condizione $(*)$ è

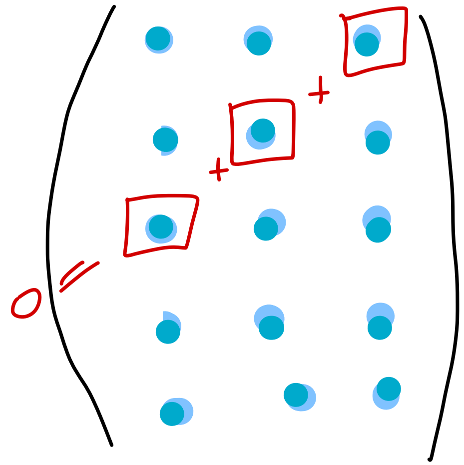
caso $m < n$ $\quad \min(m,n) = m$

$A =$



caso $m > n$, $\quad \min(m,n) = n$

$A =$



Consideriamo il caso $m \leq n$ (l'altro si fa in modo analogo)

$\Longrightarrow \min(m,n) = m$

12 - 14/03

Verifichiamo le proprietà di sottospazio:

- $0 \overset{?}{\in} W$ sì: $(*)$ è verificata perché somma di zeri
- $A, B \in W \overset{?}{\Rightarrow} A+B \in W$ sì:

$$A, B \in W \Rightarrow \sum_{j=1}^{m} A_{j,n+1-j} = 0, \quad \sum_{j=1}^{m} B_{j,n+1-j} = 0$$

$$\sum_{j=1}^{m} (A+B)_{j,n+1-j} = \sum_{j=1}^{m} \left[A_{j,n+1-j} + B_{j,n+1-j}\right]$$

$$= \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{m} A_{j,n+1-j}\right)}_{=0} + \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{m} B_{j,n+1-j}\right)}_{=0} = 0$$

- $A \in W, \lambda \in \mathbb{R} \overset{?}{\Rightarrow} \lambda A \in W$

sì: $A \in W \Rightarrow \sum_{j=1}^{m} A_{j,n+1-j} = 0$

$$\sum_{j=1}^{m} (\lambda A)_{j,n+1-j} = \lambda \sum_{j=1}^{m} A_{j,n+1-j} = \lambda \cdot 0 = 0$$

$\Rightarrow$ W è un sottospazio vettoriale di V.

8c Dire se $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \in \operatorname{span}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ -11 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}}_{v_2} \right)$

Cerchiamo, se $\exists$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tali che $v = t_1 v_1 + t_2 v_2$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 4 \\ -11 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 3 = 4t_1 + 3t_2 \\ 7 = -11t_1 + 8t_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t_2 = 1 - \frac{4}{3} t_1 \\ 7 = -11 t_1 + 8 - \frac{32}{3} t_1 \end{cases} \iff \begin{cases} t_2 = \frac{61}{65} \\ t_1 = \frac{3}{65} \end{cases}$$

Conclusione: $v \in \operatorname{span}(v_1, v_2)$ e la scrittura come comb. lin. è unica (abbiamo trovato t_1 e t_2 unici).

8d $v = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix} \overset{?}{\in} W := \operatorname{span}\left\{ \underset{w_1}{\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{w_2}{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}}, \underset{w_3}{\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}} \right\}$

Osserviamo che

- W sottosp vett. di $\mathbb{R}^2 \Rightarrow \dim W \leq 2$
- w_1 e w_2 non sono uno multiplo dell'altro $\Rightarrow \dim W \geq 2$

$\Rightarrow \dim W = 2 \Rightarrow W = \mathbb{R}^2 \Rightarrow v \in W$.

11 - 14/03

Come si esprime v come comb. lineare di w_1, w_2, w_3?

Senza fare calcoli: w_1, w_2 lin. indip. $\Rightarrow W = \text{span}(w_1, w_2)$

w_1, w_3 lin. indip. $\Rightarrow W = \text{span}(w_1, w_3)$

$\Rightarrow \exists\ \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tc $\quad v = \alpha w_1 + \beta w_2$

$v = \gamma w_1 + \delta w_3$

$\Rightarrow$ La scrittura non è unica.

12a $\quad V = \mathbb{R}^3, \quad W := \{x : 5x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$

$$W = \text{span}\Big(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{w_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}}_{w_2}\Big) \quad ?$$

$w_1 \in W$ perché $\quad 5 \cdot (+1) + 2(-1) - (3) = 0$

$w_2 \notin W$ perché $\quad 5(2) + 2(1) - (4) \neq 0$

$\Rightarrow$ w_2 non è tra i generatori di W. $\Rightarrow$ $W \neq \text{span}(w_1, w_2)$

15 Base di $W = \{ x : 7x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0 \} \subset \mathbb{R}^3$

Sia $x \in W \Rightarrow x_3 = \frac{7}{4} x_1 + \frac{5}{4} x_2$

$$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \frac{7}{4} x_1 + \frac{5}{4} x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ \frac{7}{4} x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ \frac{5}{4} x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7/4 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow x$ è comb. lin. di $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7/4 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5/4 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow W = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7/4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5/4 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$$

cioè $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7/4 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5/4 \end{pmatrix}$ sono generatori.

I due vettori non sono multipli tra loro $\Rightarrow$ sono lin. indip.

$$\Rightarrow \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7/4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5/4 \end{pmatrix} \right\}$$ è una base.

Es. Formula di Grassmann Determinare $\dim(W+Z)$, con

$$V = \mathbb{R}^5, \quad W = \operatorname{span}(w_1, w_2), \quad Z = \operatorname{span}(z_1, z_2, z_3)$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad z_1 = \begin{pmatrix} -10 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad z_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad z_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Osservazioni preliminari:

- $\dim V = 5$,
- w_1 non è multiplo di $w_2 \Rightarrow \dim W = 2$,
- In Z: abbiamo 3 vettori e sono a due a due indipendenti (non sono uno multiplo dell'altro) $\Rightarrow$ abbiamo due possibilità $\dim Z = \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases}$
- $\dim(W \cap Z) = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \end{cases}$

Calcoli: $x \in W \cap Z \iff x = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 = \beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 + \beta_3 z_3$

17 – 14/03

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha_2 = -10\beta_1 + 2\beta_2 + 4\beta_3 \\ \alpha_1 = 2\beta_1 + \beta_2 + 10\beta_3 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 = -\beta_1 + \beta_2 - 2\beta_3 \\ 3\alpha_1 = \beta_1 + 3\beta_2 \\ -\alpha_1 + 7\alpha_2 = 6\beta_2 + \beta_3 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{3}\beta_1 + \beta_2 \\ \alpha_2 = -5\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3 \\ \frac{1}{3}\beta_1 + \cancel{\beta_2} = 2\beta_1 + \cancel{\beta_2} + 10\beta_3 \\ 2\left(\frac{1}{3}\beta_1 + \beta_2\right) - \left(-5\beta_1 + \beta_2 + 2\cancel{\beta_3}\right) = -\beta_1 + \beta_2 - 2\cancel{\beta_3} \\ -\left(\frac{1}{3}\beta_1 + \beta_2\right) + 7\left(-5\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3\right) = 6\beta_2 + \beta_3 \end{cases}$$

$\Uparrow \beta_3 = 0$

$\Longrightarrow \beta_1 = 0$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \beta_1 = 0 \\ \beta_3 = 0 \\ \alpha_1 = \beta_2 \\ \alpha_2 = \beta_2 \\ -\beta_2 + 7(\beta_2) = 6\beta_2 \quad \text{sempre verificata} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \alpha_2 = \beta_2 \\ \beta_1 = \beta_3 = 0 \end{cases}$$

Quindi: $\beta_2(w_1 + w_2) = \beta_2 z_2$ Cioè $z_2 = w_1 + w_2$.

$\Rightarrow$ $Z \cap W = \text{span}(z_2) = \text{span}(w_1 + w_2)$ ha dimensione 1.

$\dim(Z \cap W) = 1$

Spazio Z: $\dim Z = 2$ o 3. Poiché z_1 e z_2 sono lin. indip. ci basta capire se z_3 si può esprimere come comb. lin. di z_1 e z_2 oppure no.

cerco $t, s \in \mathbb{R}$ t.c. $z_3 = t z_1 + s z_2$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 4 = -10t + 2s \\ 10 = 2t + s \\ -2 = -t + s \\ 0 = t + 3s \\ 1 = +6s \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \ldots \\ \ldots \\ -2 = 1/2 + 1/6 \quad \text{Falso!} \\ t = -3s = -1/2 \\ s = 1/6 \end{cases}$$

Quindi z_3 non è comb. lin. di z_1 e z_2 $\Rightarrow$ $\dim Z = 3$.

Somma: la formula di Grassmann ci fornisce

$$\dim(W + Z) = \dim W + \dim Z - \dim(W \cap Z) = 2 + 3 - 1 = 4$$

19-11/03

Es. Moltiplicazioni tra matrici

$$A = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{4} & 0 & 7 \\ \frac{1}{2} & 1 & -10 & 0 \\ \frac{5}{3} & -\frac{1}{4} & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

matrice 3×4

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

matrice 4×3

Calcolare AB e BA.

AB prodotto $(3 \times 4) \times (4 \times 3) \rightsquigarrow (3 \times 3)$

BA prodotto $(4 \times 3) \times (3 \times 4) \rightsquigarrow (4 \times 4)$

$$AB = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{4} & 0 & 7 \\ \frac{1}{2} & 1 & -10 & 0 \\ \frac{5}{3} & -\frac{1}{4} & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & 34 & \frac{12}{4} \\ -\frac{57}{2} & 52 & -\frac{15}{2} \\ -\frac{13}{6} & \frac{56}{3} & \frac{67}{12} \end{pmatrix}$$

prodotto scalare RIGA · COLONNA $-2 \cdot (-1) + \frac{3}{4} \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 7 \cdot 0 = \frac{7}{2}$

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{4} & 0 & 7 \\ \frac{1}{2} & 1 & -10 & 0 \\ \frac{5}{3} & -\frac{1}{4} & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & \frac{7}{2} & -40 & -9 \\ 1 & \frac{3}{4} & 0 & 20 \\ -\frac{41}{6} & -3 & 50 & 23 \\ \frac{29}{3} & 5 & -60 & 8 \end{pmatrix}$$