Ist. Mat. I - CIA
15/2/24

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sup\{A(P_-) : P_- \le f\}$$

$$= \inf\{A(P_+) : f \le P_+\} \qquad \text{se } f \ge 0$$

se vale questo

$$\int f = \int f_+ - \int f_- \qquad \forall f$$

le funzioni continue sono integrabili.

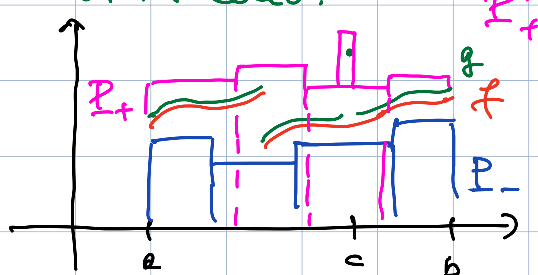
—— o ——

<u>Prop</u>: se esiste $\int_a^b f(x)\,dx$ e g coincide con f escluso un punto allora $\exists \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

<u>Dim</u> per $f, g \ge 0$ (estensione: esercizio).

Sia c dove non coincidono.

$g(c) > f(c)$



Prendo $P_- \le f \le P_+$ con $A(P_+) - A(P_-) < \varepsilon/2$

Aggiungo rettangolo a P_+ trovando P'_+ con $P_- \le g \le P'_+$ e $A(P'_+) - A(P_-) < \varepsilon$

$g(c) < f(c)$

Simile:
P_+ per f è ok anche per g
se $P_- \le f$ gli tolgo un minuscolo rettangolo ...

Prop: se $\exists \int_a^b f(x)\,dx$, $\exists \int_b^c g(x)\,dx$

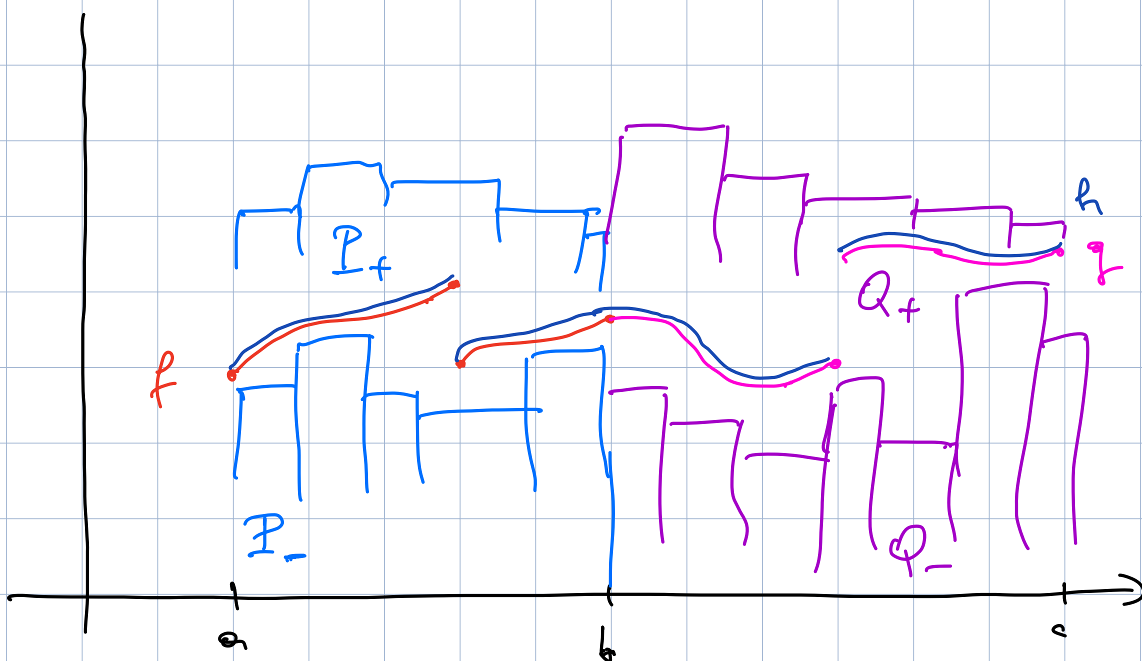
$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{su } [a,b) \\ g(x) & \text{su } (b,c] \\ \text{a caso} & \text{in } b \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \exists \int_a^c h(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c g(x)\,dx$$

Dim: suppongo $f,g \geq 0$. Altrimenti noto che

$$h_\pm = \begin{cases} f_\pm & \dots \\ g_\pm & \dots \\ \dots \end{cases}$$

Suppongo anche che $f(b) = g(b) = h(b)$.



$R_\pm = P_\pm + Q_\pm$ $\qquad R_- \leq h \leq R_+$

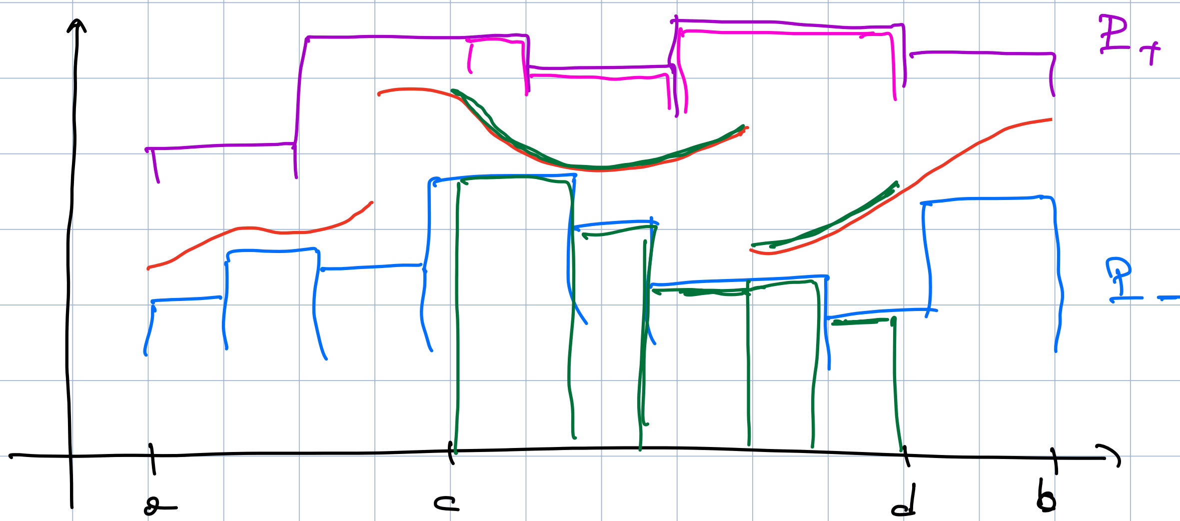
$A(R_\pm) = A(P_\pm) + A(Q_\pm)$

$A(P_+) - A(P_-) < \varepsilon/2$ $\qquad A(Q_+) - A(Q_-) < \varepsilon/2$

Prop: se $\exists \int_a^b f(x)\,dx$ e $[c,d] \subset [a,b]$

$\Rightarrow \exists \int_c^d f(x)\,dx$.

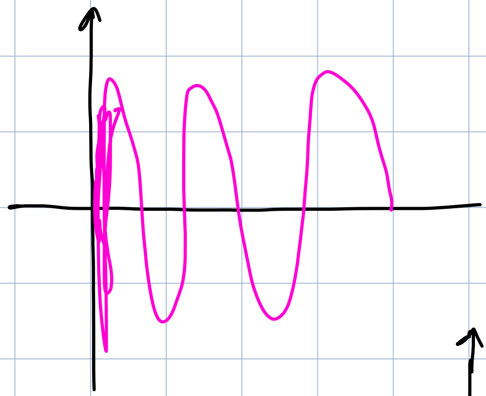
Dim: suppongo $f \geq 0$ (estensione facile).



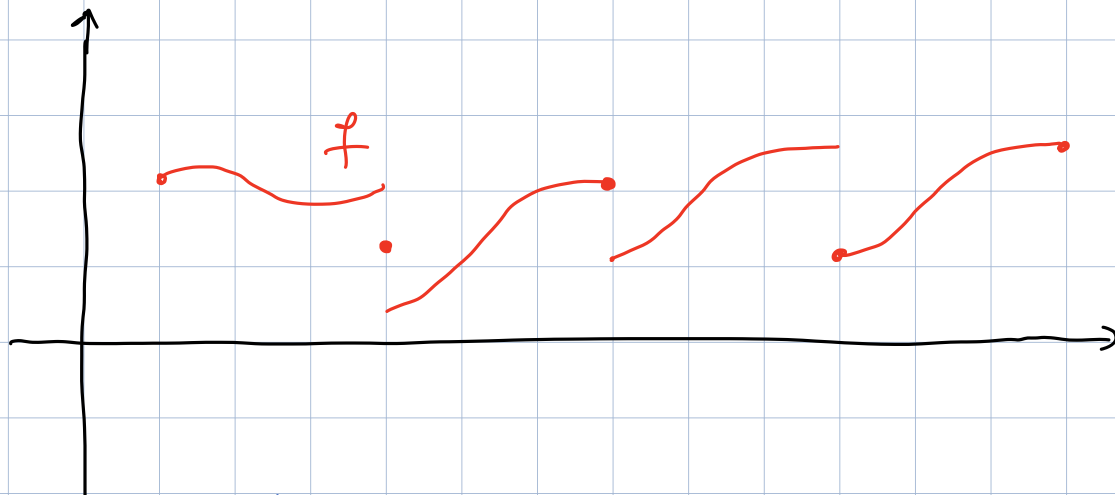
Cor: se $\exists \int_a^b f(x)\,dx$ e $c \in (a,b)$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Conseguenze: su $[a,b]$ sono integrabili tutte le funzioni continue con un numero finito di discontinuità in cui hanno limite destro e sinistro.



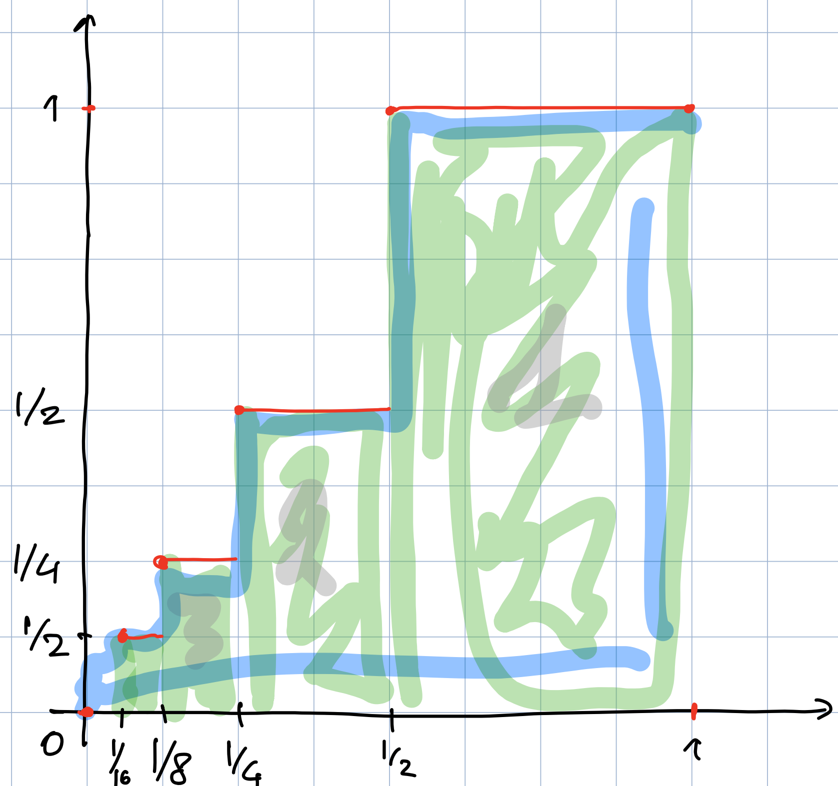
cioè quelle ottenute da funzioni continue su intervalli chiusi e limitati raccordandole anche cambiando i valori di raccordo:



Inoltre: l'integrale è la somma degli integrali delle funzioni raccordate.

— o —

Fatto: anche altre funzioni sono integrabili. Ad esempio lo sono le funzioni monotone



non decrescente con infinite discontinuità area sottografico: $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\dots$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\dots\right)$$

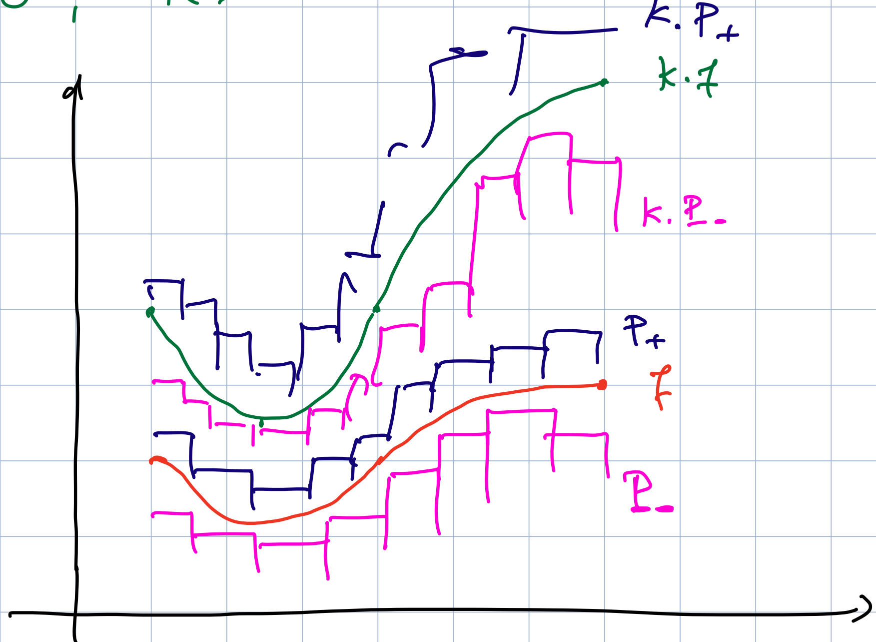
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}$$

Prop: se $\exists\int_a^b f(x)\,dx$ e $k\in\mathbb{R}$ allora

$$\exists\int_a^b k\cdot f(x)\,dx = k\cdot\int_a^b f(x)\,dx$$

Dimo: 1. $k=0$ ✓

2. $f\geq 0$, $k>0$



$(k=2)$

3. f qualsiasi $k>0$

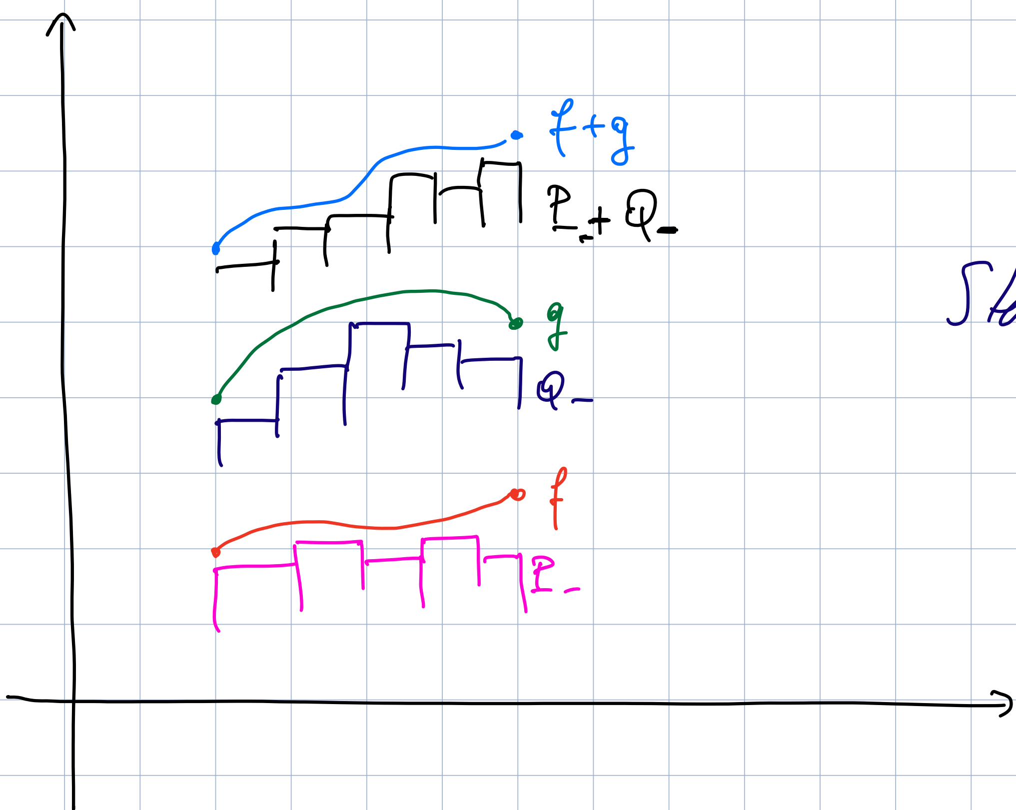
$(k\cdot f)_+ = k\cdot f_+ \qquad (k\cdot f)_- = k\cdot f_-$

$\Rightarrow$ ....

Teo: se $\exists \int_a^b f(x)\,dx$, $\int_a^b g(x)\,dx$ allora

$$\exists \int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

Dim. per $f, g \geq 0$



Stesso con P_+, Q_+ ....

In generale non è immediato.
Però per le funzioni continue si vede in altro modo.

Oss: se $f \geq 0$ allora $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

Prop: se $f(x) \geq g(x)$ su $[a,b]$ allora $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

(Segue facilmente dalla additività:

$$f \geq g \Rightarrow f - g \geq 0 \Rightarrow \int (f-g) \geq 0$$

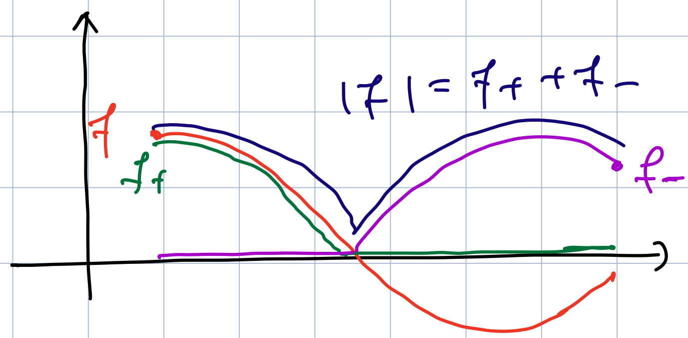
$$\int (f-g) = \int f - \int g$$

$$\Rightarrow \int f \geq \int g \, .)$$

Prop: $\exists \int_a^b f(x)\,dx \Rightarrow \exists \int_a^b |f(x)|\,dx \geq \left| \int_a^b f(x)\,dx \right|$

Dimo: $f = f_+ - f_-$

$$\Rightarrow |f| = f_+ + f_-$$



$$\Rightarrow \int |f| = \int f_+ + \int f_-$$

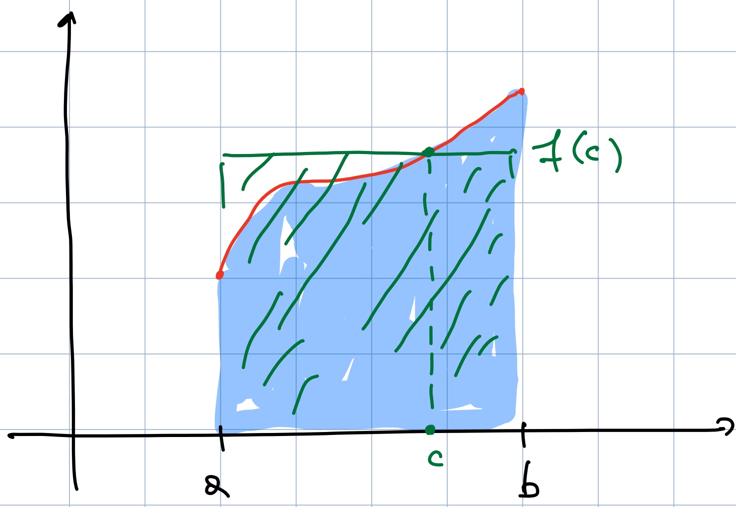
$$\geq$$

$$\left| \int f \right| = \left| \int f_+ - \int f_- \right| \, .$$

$\blacksquare$

Teo (media integrale): f continua su $[a,b] \Rightarrow \exists\, c \in (a,b)$ t.c. $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$

$$\left(\text{ovvero } \int_a^b f(x)\,dx = (b-a) \cdot f(c) \right)$$



Dimo: f ha min m e max M. Posso scegliere (per $f \geq 0$)

$P_- = [a,b] \times [0,m]$

$P_+ = [a,b] \times [0,M]$

$$\Rightarrow \quad m \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M \cdot (b-a)$$

$$\Rightarrow \quad m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \leq M$$

$\Rightarrow$ concludo con teo dei valori intermedi. $\blacksquare$

Teo (fondamentale del calcolo integrale):

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua; sia

$F : [a,b] \to \mathbb{R}$ $\quad F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

Allora $\exists F'(x) = f(x)$.

Def: se f è la derivata di una F diremo che F è una primitiva di f.

Dimo: devo calcolare $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$

Se $h>0$ $\quad \dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} = \dfrac{\int_a^{x+h} f - \int_a^x f}{h} = \dfrac{\cancel{\int_a^x f} + \int_x^{x+h} f - \cancel{\int_a^x f}}{h}$

$$= \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{(x+h)-x} = f(y) \qquad y\in(x,x+h)$$

$$\underbrace{y \xrightarrow{h\to 0} x}_{\downarrow\, f(x)}$$

Se $h<0$ analogo: $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(y) \quad y\in(x+h,x)$

$\boxtimes$

Conseguenza: se G è una qualsiasi primitiva di f si ha

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b)-G(a).$$

Dim: $\quad F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \implies F'(x) = f(x)$

Poiché $G'(x)=f(x)$ ho $F'(x)-G'(x)\equiv 0$

$\implies F-G$ è costante su $[a,b]$.

$\implies G(x) = F(x)+k$

$\implies G(b)-G(a) = (F(b)+k)-(F(a)+k)$

$$= F(b) - F(a)$$

$$= \int_a^b f(t)\,dt - \underbrace{\int_a^a f(t)\,dt}_{0} = \int_a^b f(x)\,dx.$$

$\boxed{\text{///}}$

Come calcolare $\int_a^b f(x)\,dx$

- trovare una primitiva indicata con

$$\int f(x)\,dx \quad \text{integrale indefinito}$$

- valutare la primitiva tra a e b.

<u>Regole di integrazione</u>:

- se $k \neq -1$ $\quad \int x^k\,dx = \frac{1}{k+1} \cdot x^{k+1} \underbrace{+\,c}_{\text{costante indeterminata}}$

Es: $\int_2^5 x^4 = \frac{1}{5} x^5 \Big|_2^5 = \frac{1}{5}\left(5^5 - 2^5\right)$

- $\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + c$

Es: $\int_{-1}^{2} \frac{1}{x} dx$ NON HA SENSO

$$\int_{2}^{3} \frac{1}{x} dx = \log|x| \Big|_{2}^{3} = \log(3) - \log(2)$$

- $\int \sin(x) dx = -\cos(x) + c$

Es: $\int_{0}^{\pi/4} \sin(x) = -\cos(x) \Big|_{0}^{\pi/4} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$

- $\int \cos(x) dx = \sin(x) + c$

- $\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \tan(x) + c$

- $\int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = -\cot(x) + c$

- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + c$

- $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + c$

- $\int e^x\,dx = e^x + c$

<u>Cor</u>: se $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sono continue

allora $\displaystyle\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

(Vero per ogni f,g integrabili.)

<u>Dimo</u>: se F è primitiva di f, G primitiva di g

$$(F+G)' = F' + G' = f+g$$

$$\Rightarrow \int_a^b (f+g) = (F+G)\Big|_a^b = F\Big|_a^b + G\Big|_a^b = \int f + \int g.$$

$\boxed{//}$

Integrazione di funzioni razionali:

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx \qquad p(x), q(x) \text{ polinomi.}$$

- Passo I: eseguire la divisione con quoziente e resto in modo da ricondursi al caso in cui $p(x)$ ha grado minore di $q(x)$

$$\int \frac{2x^3 - 5x}{x^2+x+3}\,dx$$

$$\begin{array}{rrr|l}
2x^3 & & -5x & x^2+x+3 \\
\hline
-2x^3 & -2x^2 & -6x & 2x-2 \\
\hline
 & -2x^2 & -11x & \\
 & 2x^2 & +2x+6 & \\
\hline
 & & -9x+6 &
\end{array}$$

$$\int \frac{2x^3-5x}{x^2+x+3}\,dx = \int \left(2x-2 - \frac{9x-6}{x^2+x+3}\right) dx$$

$$= x^2 - 2x - \int \frac{9x-6}{x^2+x+3}\,dx$$

Caso 1 : $q(x)$ ha grado 1 :

$$\int \frac{a}{bx+c}\,dx = \frac{a}{b} \cdot \int \frac{1}{x+c/b}\,dx = \frac{a}{b} \cdot \log\left|x+\frac{c}{b}\right| + k$$