Soluzioni di alcuni esercizi lasciati per casa

1. Provare che $|x+y| \le |x|+|y|$ per $x,y \in \mathbb{R}$ distinguendo i segni degli argomenti dei $|\cdot|$.

Se x e y sono concordi oppure uno dei due è nullo vale banalmente l'uguaglianza.
Se sono discordi, a meno di scambiare x e y tra loro posso supporre $x > 0 > y$ e provo le disuguaglianze strette:

- se $|x| \geq |y|$ la disuguaglianza è $x+y < x-y$
  cioè $2y < 0$ <u>vera</u>

- se $|x| \leq |y|$ la disuguaglianza è $-x-y < x-y$
  cioè $0 < 2x$ <u>vera</u>.

2. Provare che $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ è limitato ma non ha né sup né inf in $\mathbb{Q}$.

A è simmetrico rispetto a 0, dunque basta vedere che è sup. lim. ma non ha sup.

<u>Sup. lim.</u>: Se $x \in \mathbb{Q}$, $x > 2$, usando due volte la monotonia di $>$ si ha $x^2 > x \cdot 2 > 2 \cdot 2 = 4 > 2$ dunque $x \notin A$; pertanto $x \leq 2$ $\forall x \in A$.

Non ha sup: Supponiamo che $s = \sup(A) \in \mathbb{Q}$.
Affermo che $s^2 = 2$, da cui è assurdo (so che $\nexists s \in \mathbb{Q}, s^2 = 2$).
Basta vedere che $s^2 < 2$ e $s^2 > 2$ sono impossibili.

Se $s^2 < 2$ prendo $x = s + t$ con $t \in \mathbb{Q}$, $t < 1$, $t > 0$
Allora $x^2 = s^2 + 2st + t^2 < s^2 + 4t + t < s^2 + 5t$
(usato: $s \le 2$, $t^2 < t$); ora se $t < \dfrac{2-s^2}{5}$ ho $x^2 < 2$
dunque $x \in A$ e $x > s$: s non sarebbe un maggiorante di A, contro la definizione di $s = \sup(A)$

Se $s^2 > 2$ prendo $x = s - t$ con $t \in \mathbb{Q}$, $t < 1$, $t > 0$.
Allora $x^2 = s^2 - 2st + t^2 > s^2 - 2st$; ora se $t < \dfrac{s^2-2}{2s}$ ho $x^2 > 2$; se $a \in A$ ho $x^2 > 2 > a^2$
dunque $x > a$; allora x è un maggiorante e $x < s$, contro la definizione di $s = \sup(A)$.

3. Se $A = \{x \in \mathbb{R} : x^n < a\}$ e $y = \sup(A)$ ho $y^n = a$.

Basta provare che $y^n < a$ e $y^n > a$ sono impossibili:

Se $y^n < a$ prendo $x = y + t$ con $0 < t < 1$. Allora

$$x^n = (y+t)^n = y^n + t \cdot \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} y^{n-k} t^{k-1}$$

$$\le y^n + t \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} y^{n-k}}_{\text{chiamo questo } M}$$

Ora se prendo $t < \frac{a - y^n}{M}$ ho $x^n < a$.
Dunque $x \in A$ e $x > y$, contro la def di $y = \sup(A)$

Se $y^n > a$ prendo $z = y - t$ con $0 < t < 1$.
Con un ragionamento analogo (più difficile perché gli addendi del binomiale hanno segno variabile) vedo che per t abbastanza piccolo ho $z^n > a$.
Per ogni $x \in A$ ho allora $z^n > a > x^n$, da cui $z > x$, pertanto z è un maggiorante di A ma $z < y$, contro la def. di $y = \sup(A)$.

4. Provare che se $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ la funzione
$\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$, $q \longmapsto a^q$ è crescente.

Verifico intanto che se $n, m \in \mathbb{Z}$ e $n < m$ ho $a^n < a^m$.

Caso 1 : $0 \leq n < m$

$$a^m = a^n \cdot a \cdot \ldots \cdot a > a^n \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 = a^n$$

usando $m-n$ volte la monotonia

Caso 2 : $n < 0 \leq m$

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}} < 1 \; ; \; a^m \geq 1 \implies a^n < a^m$$

Caso 3 : $n < m < 0$

$$a^n < a^m \iff \frac{1}{a^{-n}} < \frac{1}{a^{-m}} \iff a^{-m} < a^{-n}$$

vero per il caso 1 : $0 < -m < -n$.

Ora noto che fissato $t \in \mathbb{Z}$, $t > 0$, se $b < c$ ho $b^t < c^t$ usando t volte la monotonia. In realtà

$$b = c \Longrightarrow b^t = c^t$$
$$b > c \Longrightarrow b^t > c^t$$

dunque in definitiva

$$b < c \Longleftrightarrow b^t < c^t .$$

Ora prendo $\frac{r}{s}, \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $\frac{r}{s} < \frac{p}{q}$; posso supporre $s, q > 0$. Voglio vedere che

$$a^{\frac{r}{s}} < a^{\frac{p}{q}} .$$

Per quanto appena provato ciò equivale a

$$\left(a^{\frac{r}{s}}\right)^{qs} < \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{qs}$$

cioè a

$$a^{rq} < a^{ps}$$

ma $\frac{r}{s} < \frac{p}{q}$ significa proprio $rq < ps$ (sono in $\mathbb{Z}$)

e allora concludo grazie al primo fatto provato.

5. $\log_{a^k}(x) = \frac{1}{k} \log_a(x)$

Posto $y = \log_{a^k}(x)$ e $z = \log_a(x)$ abbiamo che y e z risolvono

$$(a^k)^y = x \qquad a^z = x$$

ovvero $a^{ky} = x$ $\qquad a^z = x$

cioè $z = ky$, ovvero $y = \frac{1}{k} z$.

6. Usando le formule di addizione del coseno provare quelle del seno.

$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)\right)$$

$$= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos(-\beta) - \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin(-\beta)$$

$$= \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$$