Ist. Mat. I - CIA
21/9/23

Prop 1: $\nexists\, x \in \mathbb{Q}$ t.c. $x^2 = 2$.

tesi

Dimostrazione per assurdo: volendo dimostrare una certa tesi, suppongo che sia falsa e ne deduco una contraddizione e
- un fatto ben noto vero
- una ipotesi

ipotesi

Prop 2: Se $n \in \mathbb{N}$ è multiplo di 2 e di 3 allora n è multiplo di 6.

tesi

Dimo (Prop. 1): per assurdo suppongo che esista $x \in \mathbb{Q}$ t.c. $x^2 = 2$. Siccome $x \in \mathbb{Q}$ posso scrivere $x = \frac{n}{m}$, $n, m \in \mathbb{Z}$ senza fattori comuni. Dunque

$$\left(\frac{n}{m}\right)^2 = 2 \implies \boxed{n^2 = 2m^2}.$$

Allora n^2 è pari; siccome dispari^2 è dispari ho che n è pari, cioè $n = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$. Sostituisco

$$4k^2 = 2m^2 \implies m^2 = 2k^2.$$

Allora m^2 è pari, dunque $\boxed{m \text{ è pari}}$.

Contraddizione. ∎

Att: ~~Se n è multiplo di k e h allora è multiplo di $k \cdot h$~~

Falsa

$k = 6 \quad h = 10 \quad n = 30$.

Prop 2: n mult. di 2 e 3 allora n mult. di 6.

Dimo: per assurdo supponiamo che n non sia mult. di 6.
Cioè $n = 6q + r$ con $0 < r < 6$, ovvero $r \in \{1,2,3,4,5\}$.

$r = 1$: $n = 6q + 1 = 2 \cdot (3q) + 1$ $\quad$ n non mult. 2
$= 3 \cdot (2q) + 1$ $\quad$ n non mult. 3

$r = 2$: $n = 6q + 2 = 3(2q) + 2$ $\quad$ n non mult. 3

$r = 3$: $n = 6q + 3 = 2(3q+1) + 1$ $\quad$ n non mult. 2

$r = 4$: $n = 6q + 4 = 3(2q+1) + 1$ $\quad$ n non mult. 3

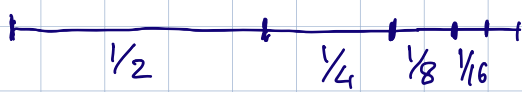
$r = 5$: $n = 6q + 5 = 2(3q+2) + 1$ $\quad$ n non mult. 2
$= 3(2q+1) + 2$ $\quad$ n non mult. 3. $\blacksquare$

Visto: $\alpha \neq 0, 1$ $\quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha^k = \frac{\alpha^{n+1} - 1}{\alpha - 1}$

$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k$ = il valore di $\dfrac{\alpha^{n+1}-1}{\alpha-1}$ per n infinitamente grande

Se $|\alpha|<1$ cioè $-1<\alpha<1$ allora
per n molto grande α^{n+1} è molto piccolo
dunque per n infinitamente grande "fa" 0

Dunque: $|\alpha|<1$ $\quad \boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k} = \dfrac{-1}{\alpha-1} = \boxed{\dfrac{1}{1-\alpha}}$



$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k - 1 = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = \boxed{1}$$

In generale: $\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k - 1 = \dfrac{1}{1-\alpha} - 1 = \boxed{\dfrac{\alpha}{1-\alpha}}$

Invece: se $|\alpha|>1$ ho che α^{n+1} diventa grande
$\Rightarrow$ la somma infinita non ha significato;
nemmeno per $\alpha=-1$ poiché la somma fa alternativamente
0 o 1.

$$\boxed{\underline{\text{Morale}}: \text{ se } |\alpha|<1 \text{ ho } \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k = \frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Prop: una scrittura decimale finita o periodica rappresenta un numero razionale.

"Dimo": finito $7432.19 = \frac{743219}{100} \in \mathbb{Q}$

periodico: $5327.1\overline{46}$

$$= \underset{\in \mathbb{Q}}{5327} + \underset{\in \mathbb{Q}}{0.1} + \underbrace{0.0\overline{46}}_{\parallel}$$

$$4 \cdot 10^{-2} + 6 \cdot 10^{-3} + 4 \cdot 10^{-4} + 6 \cdot 10^{-5} + \dots$$

$$= 10^{-2}\left((4 + 6 \cdot 10^{-1}) + (4 + 6 \cdot 10^{-1}) \cdot 10^{-2} + (4 + 6 \cdot 10^{-1}) \cdot 10^{-4} + \dots \right)$$

$$= 10^{-2} \cdot (4 + 6 \cdot 10^{-1}) \cdot (1 + 10^{-2} + 10^{-4} + 10^{-6} \dots)$$

$$= 10^{-2} \cdot (4 + 6 \cdot 10^{-1}) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (10^{-2})^k \qquad \left(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k = \frac{1}{1-\alpha} \right) \quad \alpha = \frac{1}{100}$$

$$= 10^{-2} \cdot (4 + 6 \cdot 10^{-1}) \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{100}}$$

$$= \frac{1}{\cancel{100}} \cdot \left(4 + \frac{6}{10}\right) \cdot \frac{\cancel{100}}{99} = \frac{46}{990} \in \mathbb{Q}$$

$\blacksquare$

Attenzione: $0.\overline{9} = 0.99999\dots$

$$0.\overline{9} = \sum_{k=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-k} = 9 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k = 9 \cdot \frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = 1$$

Nelle scritture decimali periodiche il periodo non può essere 9.

$73.4\overline{29}$ OK

$51.17\overline{9} = 51.18$

Esercizio: verificare che ogni numero razionale ha una scrittura decimale finita o periodica.

$\mathbb{R}$ = l'insieme di tutte le scritture decimali anche non periodiche (escluse quelle di periodo 9)

Fatto: le due costruzioni (rette + decimali) danno lo stesso oggetto.

Esempio (decimali) di reale non razionale:

$0.101001000100001000001000000 1 \ldots$

Principio di induzione

Se voglio dimostrare che una certa proposizione $P(n)$ riguardante un naturale n è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$ basta verificare che:

- $\mathcal{P}(0)$ è vera (cioè $\mathcal{P}(n)$ per $n=0$) PASSO BASE
- Se $\underbrace{\mathcal{P}(n) \text{ è vera}}_{\text{ipotesi induttiva}}$ per un n generico PASSO INDUTTIVO
  allora $\underbrace{\text{è vera } \mathcal{P}(n+1)}_{\text{tesi induttiva}}$.

Perché basta: voglio vedere che $\mathcal{P}(n)$ è vera $\forall n$:

$n=0$: vera per PB

$n=1$: applico PI con $n=0$: "Se $\underbrace{\mathcal{P}(0) \text{ vera}}_{\text{sì per sopra}}$, anche $\mathcal{P}(1)$"

dunque $\mathcal{P}(1)$ vera

$n=2$: applico PI con $n=1$: "Se $\underbrace{\mathcal{P}(1) \text{ vera}}_{\text{sì per sopra}}$, anche $\mathcal{P}(2)$"

dunque $\mathcal{P}(2)$ vera

$n=3$: applico PI per $n=2$ . . . . .

<u>Esempio</u>: $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0,1$ $\Longrightarrow$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha^k = \frac{\alpha^{n+1}-1}{\alpha-1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

<u>Dim. per induzione</u>:

PB : $n=0$

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{0} \alpha^k}_{\alpha^0 = 1} = \underbrace{\frac{\alpha^{0+1}-1}{\alpha-1}}_{\frac{\alpha-1}{\alpha-1}=1}$$

VERA

PI : suppongo $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha^k = \frac{\alpha^{n+1}-1}{\alpha-1}$ ip. indutt.

devo vedere che $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \alpha^k = \frac{\alpha^{n+2}-1}{\alpha-1}$ tesi indutt.

$$\sum_{k=0}^{n+1} \alpha^k = \left(\sum_{k=0}^{n} \alpha^k\right) + \alpha^{n+1} = \frac{\alpha^{n+1}-1}{\alpha-1} + \alpha^{n+1} = \frac{\cancel{\alpha^{n+1}} - 1 + \alpha^{n+2} - \cancel{\alpha^{n+1}}}{\alpha-1} = \frac{\alpha^{n+2}-1}{\alpha-1}$$

$\blacksquare$

Esercizi : Provare che

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad ; \quad \sum_{k=0}^{n} k^2 = \boxed{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

$0+1+2+3+\dots+71 = \dfrac{71 \cdot 72}{2} = 71 \cdot 36 = \dots$

$0+1+4+9+16+25+\dots+121$

$= \dfrac{11 \cdot 12 \cdot 23}{6} = 22 \cdot 23 = \dots$

(per induzione).

Prop : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Dimo : fisso n e chiamo S la somma.

$$
\begin{aligned}
2\cdot S &= S + S \\
&= S \\
&\quad + S \\
&= 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n \\
&\quad + n + (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1 \\
&= \underbrace{(n+1) + (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1)}_{n}
\end{aligned}
$$

$$\Longrightarrow 2S = n(n+1) \Longrightarrow S = \frac{n(n+1)}{2}. \qquad \boxtimes$$

Verifico che $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ è intero

cioè che $n(n+1)(2n+1)$ è multiplo di 6

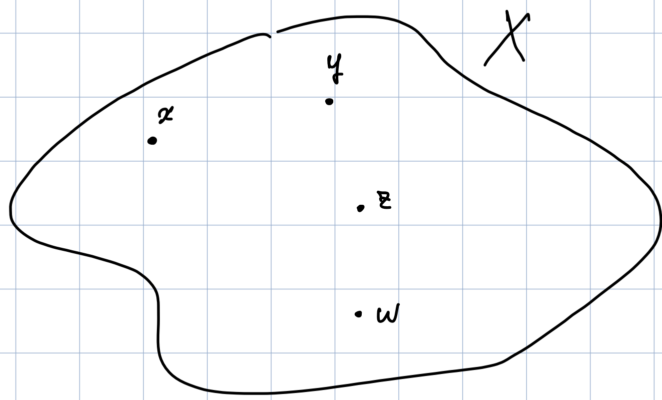
cioè che $\underbrace{n(n+1)}_{\text{mult. di } 2}(2n+1)$ è multiplo di 2 e di 3.

$n = 3k$	$3k(\dots)(\dots)$	mult. di 3
$n = 3k+1$	$(3k+1)(3k+2)(6k+3)$	mult. di 3
$n = 3k+2$	$(3k+2)(3k+3)(\dots)$	mult. di 3.

———— o ————

Gli insiemi si possono descrivere:

- per elencazione
- tramite proprietà
- diagrammi

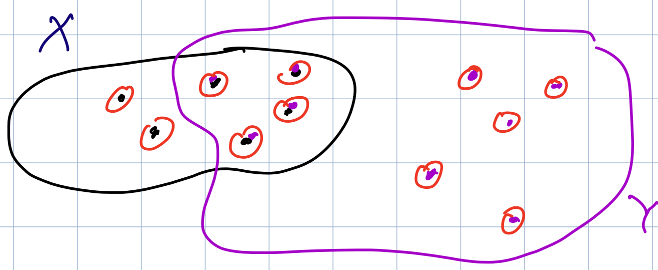


Operazioni tra insiemi :

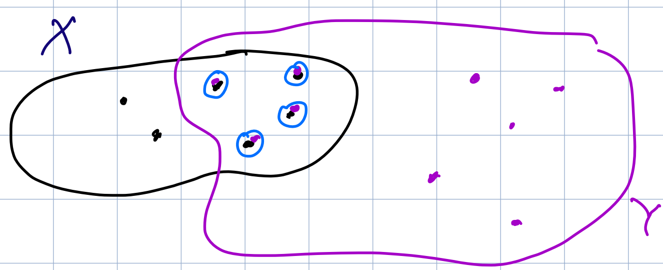
unione $X \cup Y = \{ z : z \in X \text{ oppure } z \in Y \}$

intersezione $X \cap Y = \{ z : z \in X \text{ e } z \in Y \}$

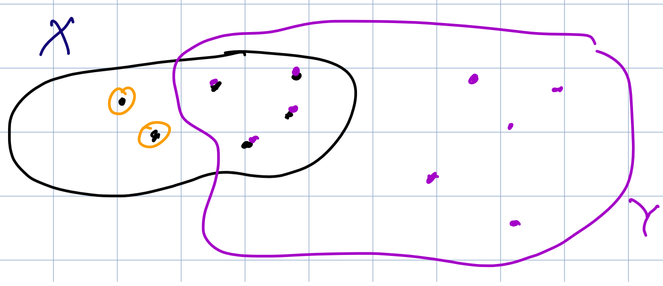
differenza $X \setminus Y = \{ z : z \in X \text{ e } z \notin Y \}$



$X \cup Y$



$X \cap Y$



$X \setminus Y$

Proposizione : frase con uno o più soggetti
e predicato che può essere vera o falsa

Connettivi : e $\quad$ P e Q $\quad$ vera se sono vere sia P sia Q

o (vel) $\quad$ P o Q $\quad$ vera se è vera P oppure se è vera Q o entrambe

non $\quad$ non(P) $\quad$ vera se P è falsa

Predicato : proposizione riguardante un soggetto generico x che varia in un insieme X e può essere vera o falsa $\forall x$.

Es : $\quad X = \mathbb{N}$; $P(x)$ = "la divisione $x : 7$ ha resto 3"

$P(51)$ falsa

$P(17)$ vera

Dati predicati $P(x)$ e $Q(x)$ con lo stesso soggetto generico

"$P(x) \Rightarrow Q(x)$" è la proposizione che è vera se per ogni x che rende vera $P(x)$ si ha che anche $Q(x)$ è vera

$P(x) \Rightarrow Q(x)$ vera se $\forall x$ t.c. $P(x)$ si ha $Q(x)$

$P(x) \Rightarrow Q(x)$ falsa se $\exists x$ t.c. $P(x)$ ma non $Q(x)$

Esempi per $X = \mathbb{N}$

x multiplo di $6 \Rightarrow x$ multiplo di 3 vera

x multiplo di $3 \Rightarrow x$ multiplo di 6 falsa