Ist. Mat. I - CIA
12/10/23

Per $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ con grado ≤ 4 ci sono formule esplicite per trovare le radici (diff. grado 3, 4).
No per grado ≥ 5.

Fatto: se $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ se ha una radice razionale è del tipo $\frac{\alpha}{\beta}$ dove α è un divisore del termine noto e β è un divisore del coeff. direttore.

Es: $\underbrace{15}_{\text{coeff. dir.}} x^7 - 9x^6 + 29x^5 \dots \quad + \underbrace{14}_{\text{termine noto}}$

Se c'è una radice in $\mathbb{Q}$ è
$$\pm \frac{1}{1}, \pm\frac{2}{1}, \pm\frac{7}{1}, \pm\frac{14}{1}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{5}, \pm\frac{1}{15}$$
$$\pm\frac{2}{3}, \pm\frac{2}{5}, \pm\frac{2}{15}, \dots$$

Oss: se ho $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ esiste $N \in \mathbb{N}$ t.c. $N \cdot p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ e le radici sono le stesse.

Oss: le radici di $az^2 + bz + c$ sono
$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(b/2) \pm \sqrt{(b/2)^2 - ac}}{a}$$

Es: $5iz^2 + 14z + 2 - i$

$$z_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 5i(2-i)}}{5i}$$

Intervallo $I \subset \mathbb{R}$

$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ $\qquad a, b \in \mathbb{R}$

$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$

$(a,b] = \ldots$

$[a,b] = \ldots$

$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$

$(-\infty, a] = \ldots$

$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$

$[a, +\infty) = \ldots$

$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

$f : I \to \mathbb{R}$ (oppure su D che è unione di intervalli)

- f è sup. lim. se $\mathrm{Im}(f)$ è sup. lim.
  cioè $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \leq M$ $\forall x \in I$

$f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ $\qquad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad f(x) \leq 1$ sup. lim.

$f(x) = 2^x$ $\qquad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non sup. lim.

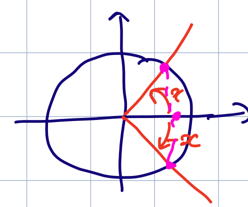
- inf. lim. $\exists m$ t.c. $f(x) \geq m$ $\forall x \in I$

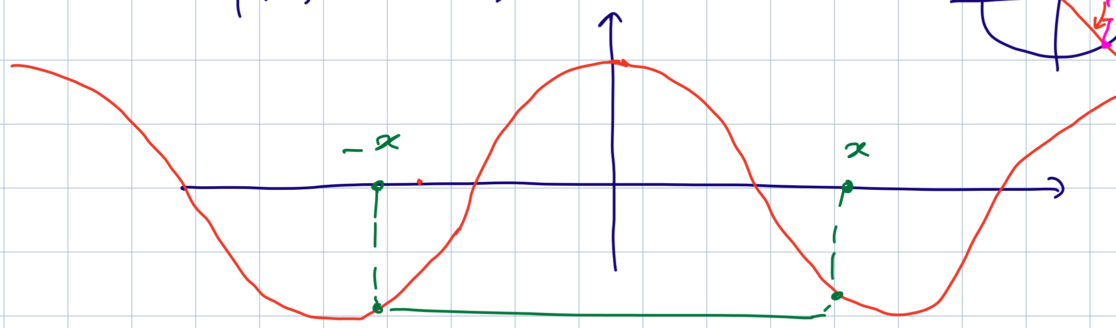
$f(x) = 2^x$ $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) \geq 0$ inf. lim.

- pari se I è simmetrico rispetto a 0

  $(-a, a)$ $\quad [-a, a]$ $\quad$ e $f(-x) = f(x)$

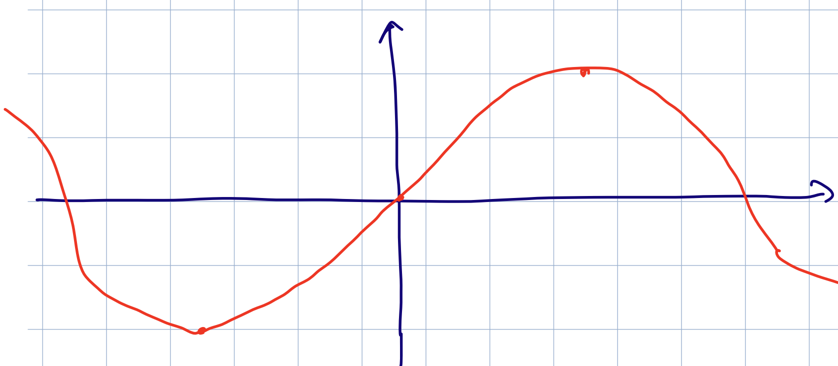
Es : $f(x) = \cos(x)$

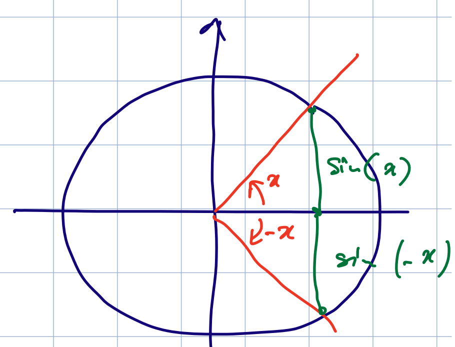




- dispari se I è simm. e $f(-x) = -f(x)$

Es : $f(x) = \sin(x)$





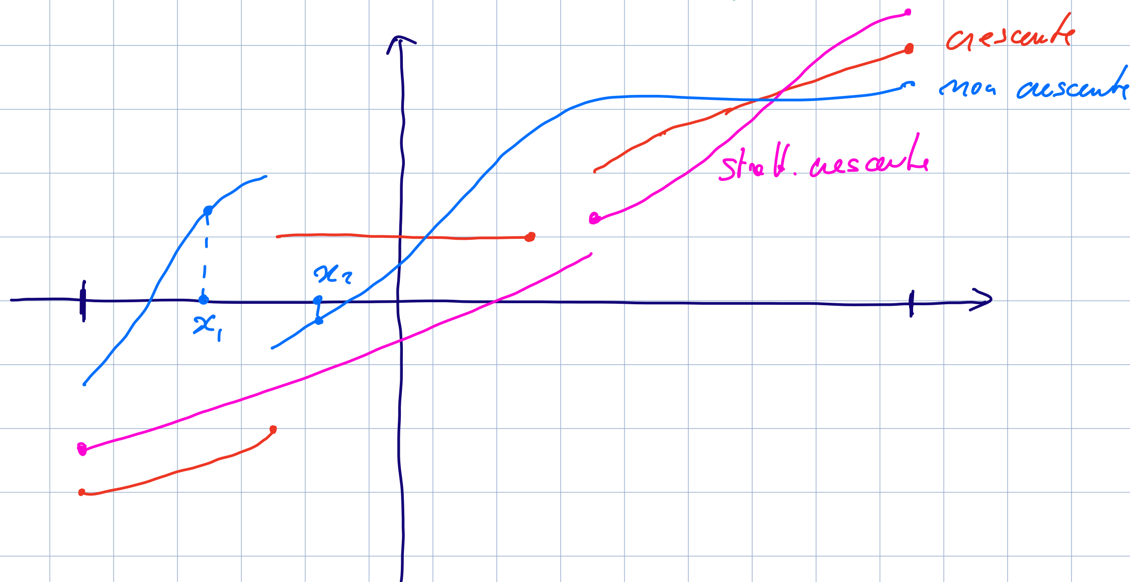
- periodica di periodo τ se $f(x+\tau) = f(x)$ $\forall x$

  $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

sin, cos sono periodiche di periodo 2π

• f crescente se $\forall x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$ si ha $f(x_1) \leq f(x_2)$ (non decrescente)

strettamente crescente se $\forall x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$ si ha $f(x_1) < f(x_2)$ (crescente)



• decrescente: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

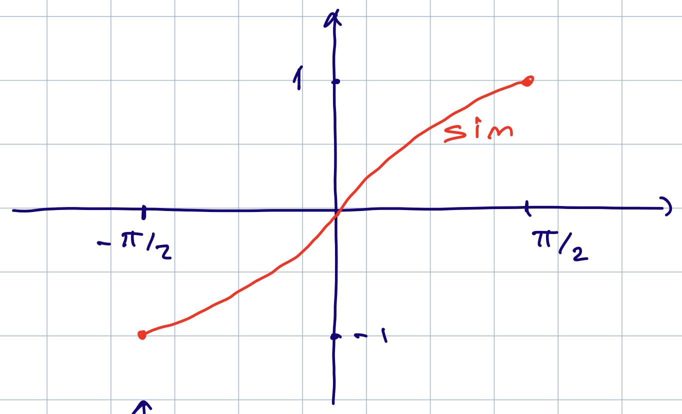
• str. decrescente: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

——— o ———

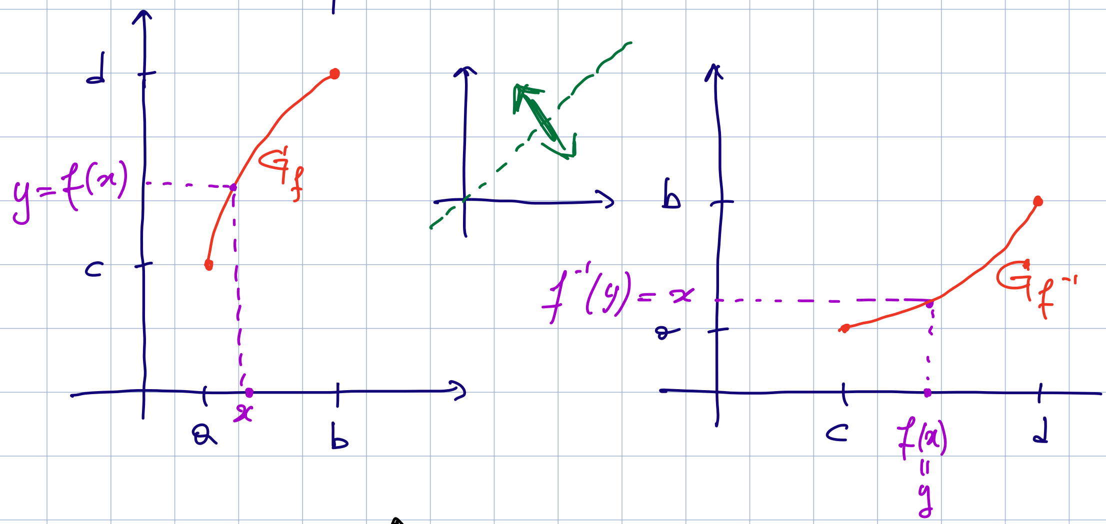
tan: $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\} = \left(-\pi/2, \pi/2\right) \cup \left(\pi/2, 3\pi/2\right) \cup \dots$
$\left(-3\pi/2, -\pi/2\right) \cup \dots$

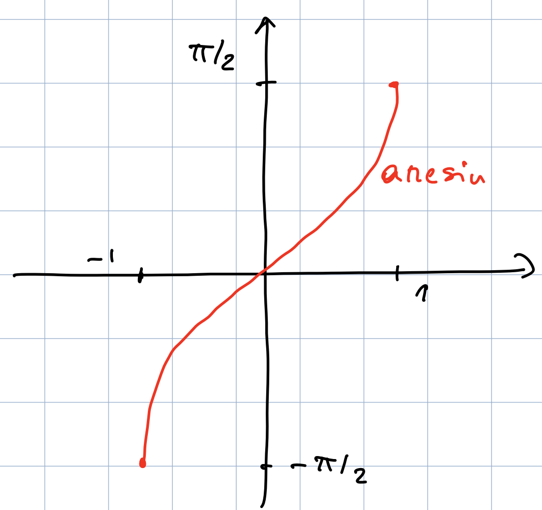
$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

<u>Fatto</u>: $\sin\big|_{[-\pi/2,\, \pi/2]} : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ è bigettiva (str. crescente)



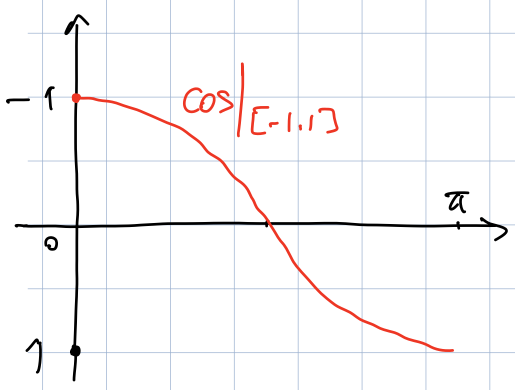
arcsin : $[-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ la sua inversa.

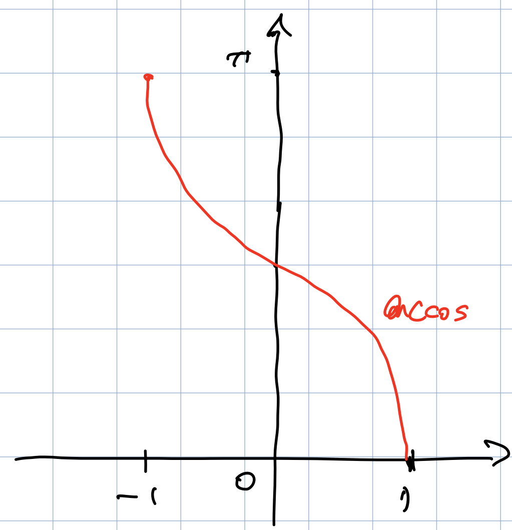




Fatto: $\cos\big|_{[0,\pi]} : [0,\pi] \to [-1,1]$ è bijettiva (strettamente decrescente) ha inversa

$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$



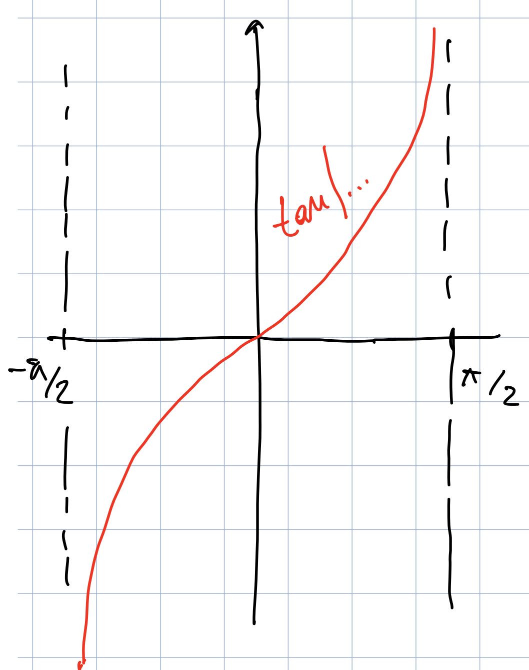


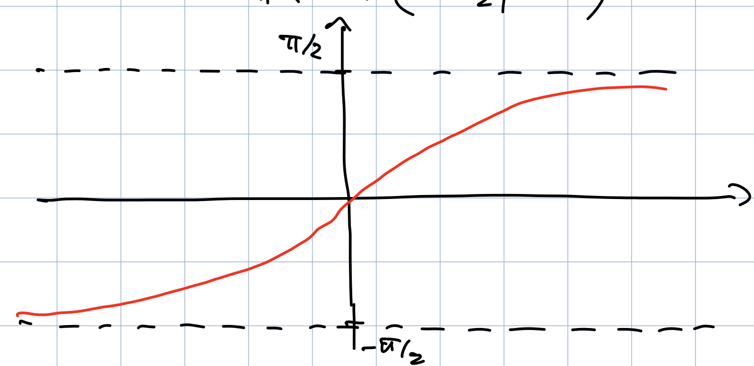
Fatto: $\tan\big|_{(-\pi/2,\,\pi/2)} : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$

è bijettiva (str. crescente)

$\Rightarrow \arctan = \tan^{-1}$

$\mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$

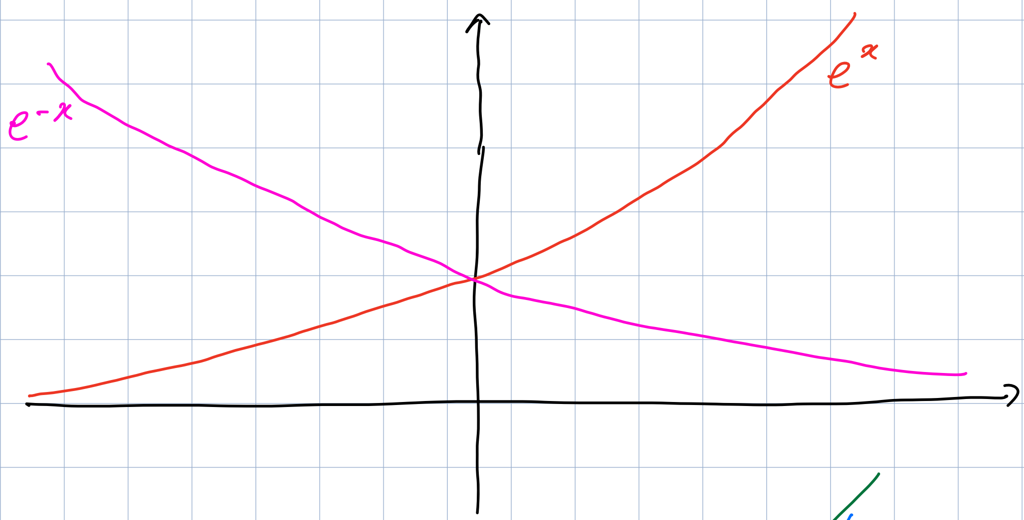


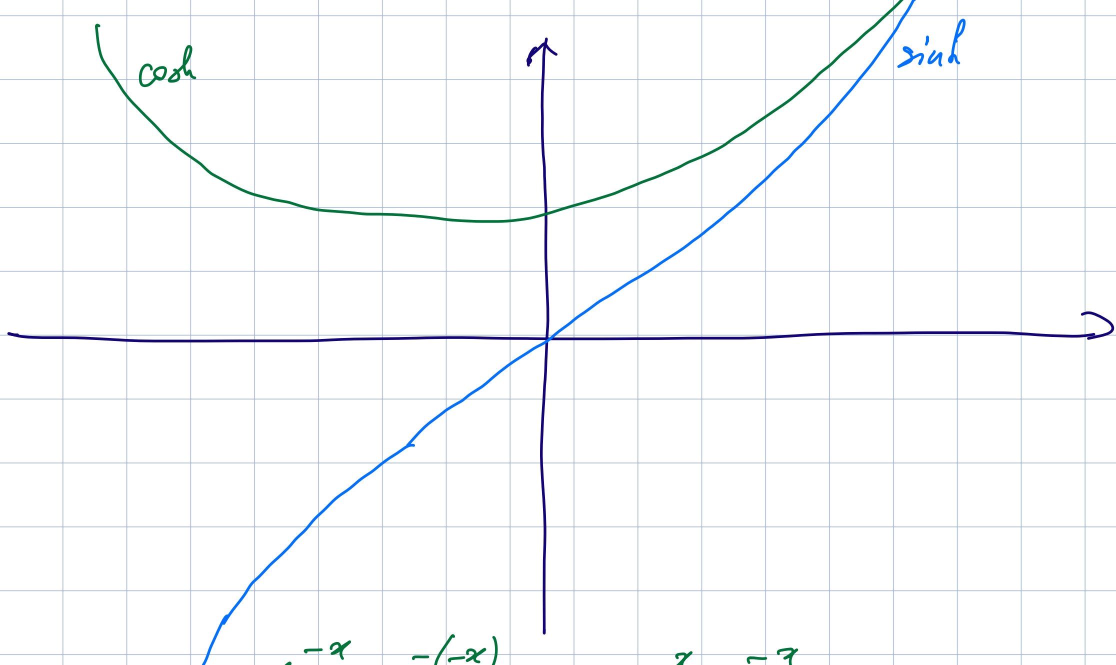


$$e = 2.71\ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$\exp(x) = e^{x}$$

$$\sinh(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \qquad \cosh(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$





$$\sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = -\frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = -\sinh(x) \quad \text{dispari}$$

$$\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \cosh(x) \quad \text{pari}$$

Oss: $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

$$\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x}+2+e^{-2x}-e^{2x}+2-e^{-2x}}{4} = 1$$

Oss: $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.$

Successione reale: $\quad a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

Notazione $\quad a(n) = a_n \quad , \quad a = (a_n)_{n=0}^{\infty}$

Esempio: $\quad a_n = \frac{n}{n+2} \qquad \left(\frac{n}{n+2}\right)_{n=0}^{\infty}$

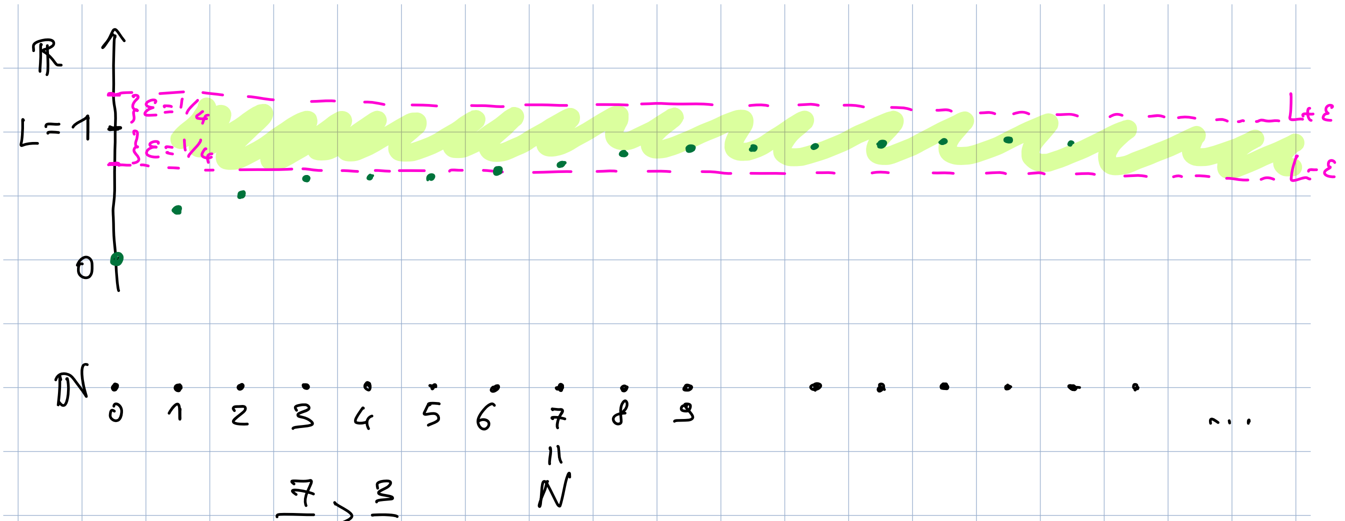
$$0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \ldots$$

Idea: i valori di a_n per n grande possono tendere a stabilizzarsi:

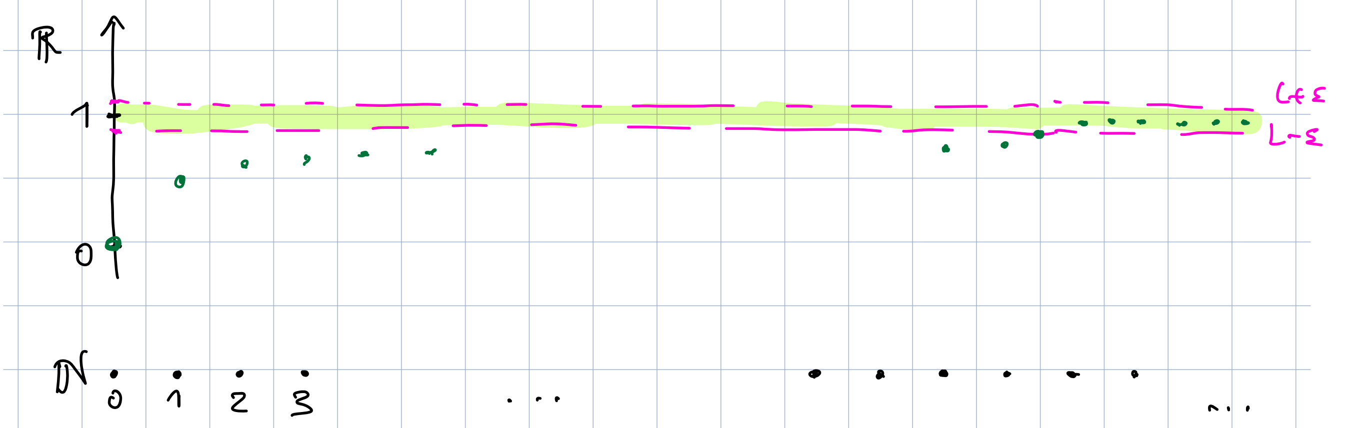
$a_n = \frac{n}{n+2} \qquad n = 1000 \qquad \frac{1000}{1002} = \frac{500}{501} = 0.9980..$

$n = 10000 \qquad \frac{10000}{10002} = 0.99980\ldots$

Def: data $(a_n)_{n=0}^{+\infty}$ e $L \in \mathbb{R}$ dico che $\lim_{n\to+\infty} a_n = L$ se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N$ t.c. $|a_n - L| < \varepsilon$ per ogni $n \geq N$.



$\frac{7}{9} > \frac{3}{4}$



Verifica formale che $\lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+2} = 1$:

Dato $\varepsilon > 0$ qualsiasi cerco N t.c.
$|a_n - 1| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$, cioè

$$1 - \varepsilon < \frac{n}{n+2} < 1 + \varepsilon \qquad \forall n \geq N$$

sempre vera $\left(\frac{n}{n+2} < 1 \right)$

Oss: la successione $a_n = \dfrac{n}{n+2}$ è crescente
cioè $a_n < a_{n+1}$ $\forall n$: infatti

$$\frac{n}{n+2} < \frac{n+1}{n+3} \iff n(n+3) < (n+1)(n+2)$$

$$\iff n^2 + 3n < n^2 + 3n + 2 \quad \underline{\text{vera}}$$

Dunque se trovo N t.c. $a_N > 1-\varepsilon$ avrò $a_n > 1-\varepsilon$ $\forall n \geq N$. Dunque cerco N t.c.

$$\frac{N}{N+2} > 1-\varepsilon$$

cioè $\quad \cancel{N} > \cancel{N} - N\cdot\varepsilon + 2(1-\varepsilon)$

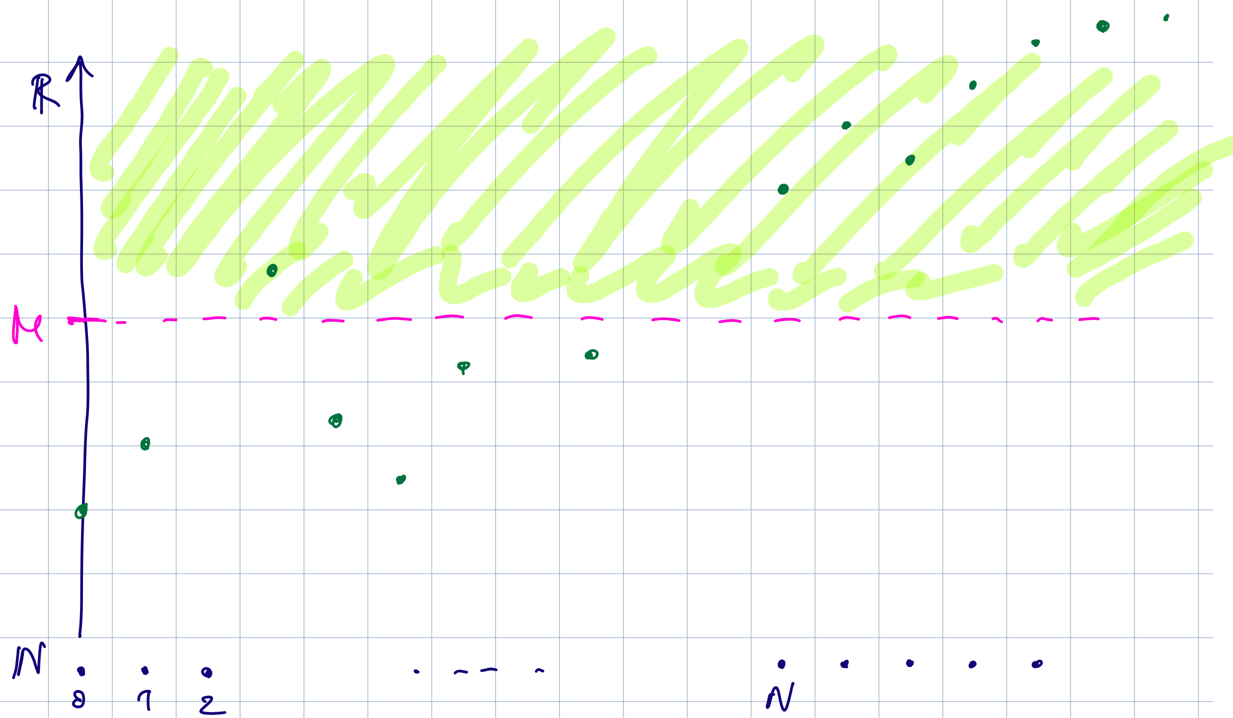
cioè $\quad N\cdot\varepsilon > 2(1-\varepsilon)$

cioè $\quad N > \dfrac{2(1-\varepsilon)}{\varepsilon}$.

Tale N esiste: $\quad N = \left[\dfrac{2(1-\varepsilon)}{\varepsilon}\right] + 1$. $\blacksquare$

Def: data $(a_n)_{n=0}^{+\infty}$ diciamo $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

se $\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N}$ t.c. $a_n > M \quad \forall n \geq N$.



Es: $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty$

Oss: $(\sqrt{n})_{n=0}^{+\infty}$ crescente.

Dato $M \in \mathbb{R}$ basta trovare N t.c.

$\sqrt{N} > M$ e avrò $\sqrt{n} > M \quad \forall n \geq N$

Voglio $N > M^2$; basta prendere $N = [M^2]+1$. ■

Def: $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ se $\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N}$ t.c.

$a_n < M \quad \forall n \geq M$

Prop: se $(a_n)_{n=0}^{+\infty}$ è crescente $(a_{n+1} \geq a_n \ \forall n)$

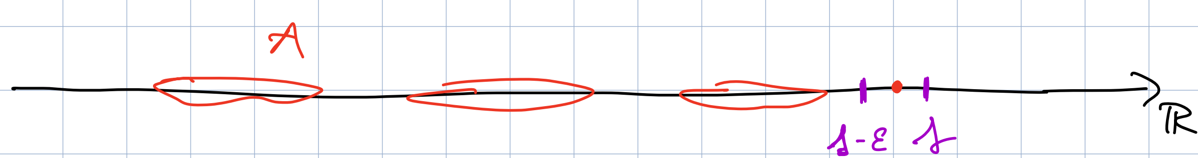
allora essa ammette limite finito o $+\infty$

Ricordo: $A \subset \mathbb{R}$ sup. lim. $s = \sup(A)$ se

- $a \leq s \quad \forall a \in A$
- se $t \in \mathbb{R}$ e $a \leq t \quad \forall a \in A$ allora $s \leq t$

Oss: $s \in \mathbb{R}$ è $\sup(A)$ se e solo se

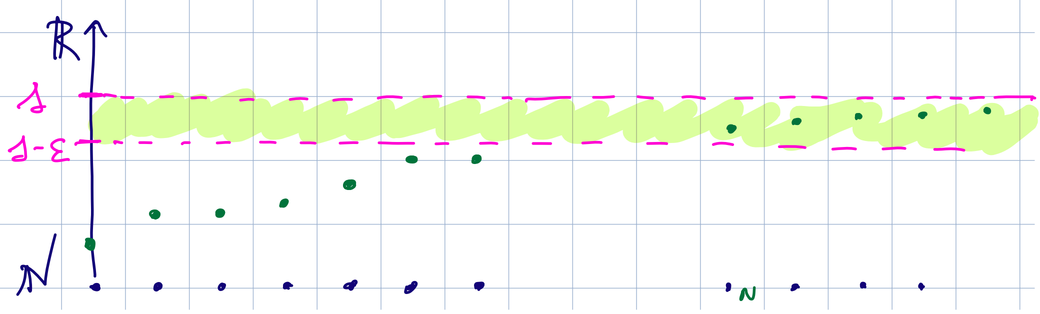
- $a \leq s \quad \forall a \in A$
- $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A$ t.c. $a > s - \varepsilon$



Dim: a_n crescente $\Longrightarrow$ ha limite.

Due casi: a_n limitata sup. oppure no.

Sì: pongo $s = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.



- $a_n \le s \quad \forall n$
- dato $\varepsilon > 0$ $\exists N$ t.c. $a_N > s - \varepsilon$

  dunque $a_n > s - \varepsilon \quad \forall n \ge N$.

$$\Rightarrow \lim a_n = s.$$

no: affermo che $\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$.

$\forall M \in \mathbb{R}$ $\exists N$ t.c. $a_N > M$

$$\Rightarrow a_n > M \quad \forall n \ge N. \qquad ▨$$

Oss: non tutte le succ. hanno limite.

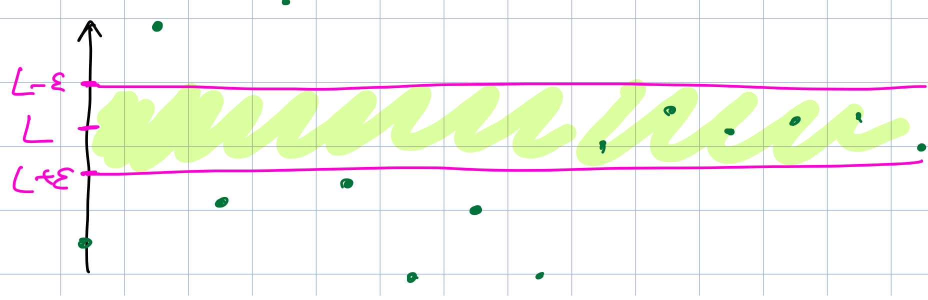
Es: $a_n = (-1)^n$

$1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$

Es: $a_n = (-1)^n \cdot n$

$1, -1, 2, -3, 4, -5, 6, -7, \dots$

Oss: se $\lim_{n \to \infty} a_n = L \in \mathbb{R}$ allora a_n è limitata.



Oss: se (a_n) è crescente è inf. lim. anzi ha min
$(a_0 \leq a_n \quad \forall n)$

Oss: se a_n è decrescente ha limite in $\mathbb{R}$ o $-\infty$.

Fatti: (1) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ è crescente

$2, \frac{9}{4} = 2.25, 2.37, \dots$

Oss: talvolta le successioni non iniziano da 0 ma ha senso $\lim_{n \to \infty}$

(2) è limitata $\Rightarrow$ ha
limite $= \sup \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

(3) $e = \lim_{n \to +\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Fatti: (1) Se $\lim_{n \to \infty} a_n = A \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \to \infty} b_n = B \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} (a_n + b_n) = A + B$.

(2) Se $\lim_{n \to \infty} a_n = \pm \infty$ e b_n è inf/sup lim.

allora $\lim_{n \to \infty} (a_n + b_n) = \pm \infty$.

(3) Se $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$

$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n)$ può non esistere o essere finito, o essere $\pm\infty$

<u>Esercizio</u>: provare (1) e (2) e fare tutti esempi per (3).