UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale e Edile

Modulo di "Geometria" — Scritto del 13/2/24 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Se $A \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{C})$ e si sa che $p_A(1) = p_A(i) = p_A(1+i) = 0$, si può concludere che A è diagonalizzabile oppure che non lo è? Spiegare.

2. Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ la matrice $\begin{pmatrix} k^3+k-1 & k-1 \\ 1-k^3 & 1 \end{pmatrix}$ risulta diagonalizzabile.

3. Trovare i vettori di $\mathbb{R}^2$ ortogonali a $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ rispetto al prodotto scalare $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ con $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.

4. Provare che $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ è ortogonale e definisce una riflessione di $\mathbb{R}^2$ rispetto a una retta.

5. Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ la conica $(3+t)x^2 + 2(t+1)xy + y^2 + 4x + 2y + 3 = 0$ è una parabola.

6. Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ il punto $[-t : 3t-1 : t+2]$ appartiene alla retta di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ passante per $[3 : 2 : -5]$ e $[1 : 4 : -3]$

7. Calcolare $\int_\alpha (xy^2\,\mathrm{d}x + x^2y\,\mathrm{d}y)$ dove $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ è data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} 2-t^2 \\ \cos(\pi \cdot t) \end{pmatrix}$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito un documento o la tessera dello studente. I telefoni devono rimanere spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

Modulo di “Geometria” — Scritto del 13/2/24 — Esercizî

1. In $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare standard considerare i piani $V = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}^{\perp}$ e $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}^{\perp}$.

(A) (6 punti) Esibire le matrici π_V e π_W delle proiezioni ortogonali di $\mathbb{R}^3$ su V e su W.

(B) (2 punti) Provare che per ogni $t, s \in \mathbb{R}$ la matrice $t \cdot \pi_V + s \cdot \pi_W$ è diagonalizzabile.

(C) (4 punti) Provare che per ogni $t, s \in \mathbb{R}$ la matrice $t \cdot \pi_V + s \cdot \pi_W$ ha l'autovalore $t + s$ ed esibire un relativo autovettore. (Suggerimento: non calcolare il polinomio caratteristico.)

2. Considerare la curva $\alpha : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}^3$ data da $\alpha(s) = \begin{pmatrix} \cos(2s) + s - s^3 \\ \sin(s) + s^2 \\ \log(1 + s) - s \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Provare che α è biregolare.

(B) (4 punti) Determinare il riferimento di Frénet di α nel punto $s = 0$.

(C) (4 punti) Calcolare curvatura e torsione di α nel punto $s = 0$.

(D) (2 punti) Calcolare $\int_\beta z \, \mathrm{d}z$ dove z è la restrizione di α all'intervallo $[0, 1]$.

Risposte ai quesiti

1. Lo è perché ha 3 autovalori distinti

2. $k \neq 0, -1$

3. I multipli di $\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$

4. È ortogonale perché le colonne sono unitarie e ortogonali fra loro. Una M ortogonale 2×2 definisce una rotazione se $\det(M) = +1$, e una riflessione rispetto a una retta se $\det(M) = -1$, e per la matrice assegnata si verifica il secondo caso

5. $t = -2$

6. $t = -2$

7. $-\frac{3}{2}$

Soluzioni degli esercizî

1.

(A) $\pi_V = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $\pi_W = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 10 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 10 \end{pmatrix}$

(B) È sempre simmetrica

(C) $u = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ è un generatore di $V \cap W$, dunque $\pi_V(u) = \pi_W(u) = u$, onde $(t \cdot \pi_V + s \cdot \pi_W)(u) = (t+s) \cdot u$

2.

(A) La terza componente di $\alpha'(s)$ si annulla solo per $s = 0$, ma per $s = 0$ non si annullano le prime due. La terza componente di $\alpha''(s)$ non si annulla mai

(B) $t = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $n = \frac{1}{\sqrt{19}}\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $b = \frac{1}{\sqrt{38}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

(C) $\kappa = \frac{1}{2}\sqrt{19}$, $\tau = \frac{17}{38}$

(D) $\frac{1}{2}(\log(2) - 1)^2$