UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale e Edile

**Modulo di "Geometria"** — Scritto del 12/9/23 — Quesiti

**Nome** ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

**1.** Per $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ calcolare il polinomio caratteristico $p_A(t)$ sapendo che $\mathrm{tr}(A) = -5$, $\det(A) = -11$ e $p_A(1) = 15$. (Convenzione: $p_A(t)$ è monico.)

**2.** Stabilire per quali $z \in \mathbb{C}$ la matrice $\begin{pmatrix} z+1+i & 1-i \\ -i(1+z) & -1 \end{pmatrix}$ risulta diagonalizzabile.

**3.** In $\mathbb{R}^2$ considerare il prodotto scalare $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ con $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$ e la norma associata. Determinare tutti i vettori ortogonali a $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ rispetto a tale prodotto scalare e unitari rispetto a tale norma.

**4.** Descrivere l'azione di una isometria di $\mathbb{R}^3$ rappresentata da una matrice con determinante 1 e traccia 0.

**5.** Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ la conica di equazione $x^2 + 2txy + 2y^2 + 6x + 6\sqrt{2}y = 0$ è una parabola.

**6.** Determinare i punti all'infinito del luogo in $\mathbb{R}^2$ definito dell'equazione
$3x^3 - 11x^2y - 6xy^2 + 8y^3 - 7x^2 + 8y - 30 = 0$.

**7.** Calcolare $\int_\alpha \cos(xy)(y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y)$ dove $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ è la curva data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} t^3 - 2t \\ 2t^2 + t - 4 \end{pmatrix}$.

**Le risposte devono essere sinteticamente giustificate**

Deve essere esibito un documento o la tessera dello studente. I telefoni devono rimanere spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♡ 2. ♠ 3. ♢ 4. ♣ 5. ♠ 6. ♢ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♢ 10. ♣

# Modulo di "Geometria" — Scritto del 12/9/23 — Esercizî

**1.** Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considerare la matrice $M = \begin{pmatrix} 2k^2 & 2 & -2k^2+k-1 \\ 2(k^2-1) & k+5 & -2(k^2+1) \\ k^2-1 & k+2 & -k^2-k \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Provare che $\det(M) = -k^4 - 2k^3 + 2k^2 - 2k + 3$.

(B) (3 punti) Sapendo che $M$ ha sempre l'autovalore $k^2+1$, determinare gli altri.

(C) (2 punti) Trovare l'unico valore $k_0$ di $k$ per il quale $M$ ha un unico autovalore, e per $k = k_0$ esibire la matrice della proiezione ortogonale sull'autospazio di $M$ relativo a tale autovalore.

(D) (5 punti) Al variare di $k$ calcolare la molteplicità algebrica e geometrica degli autovalori di $M$ stabilendo per quali $k$ essa risulta diagonalizzabile.

**2.** Considerare la curva orientata $\alpha : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos^2(t) \\ \sin(t) - \cos(t) \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Provare che $\alpha$ è regolare e chiusa.

(B) (1 punto) Provare che $\alpha$ non è semplice.

(C) (3 punti) Calcolare la curvatura di $\alpha$ nel punto $t = 0$.

(D) (3 punti) Determinare il segno della curvatura di $\alpha$ al variare di $t$.

(E) (3 punti) Calcolare $\int_\beta y \, \mathrm{d}x$ dove $\beta$ è la restrizione di $\alpha$ a $[0, \pi]$.



1. ♡ 2. ♠ 3. ♢ 4. ♣ 5. ♠ 6. ♢ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♢ 10. ♣

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale e Edile

**Modulo di "Geometria"** — Scritto del 12/9/23 — Quesiti

# Risposte ai quesiti

## 3. $\diamondsuit$

**1.** $p_A(t) = t^3 + 5t^2 - 2t + 11$

**2.** $z \neq i$

**3.** $\pm\frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

**4.** Rotazione di angolo $\frac{2}{3}\pi$ intorno a una retta

**5.** $t = -\sqrt{2}$

**6.** $\{[1 : -1],\ [4 : 1],\ [2 : 3]\}$

**7.** $\sin(1)$

1. $\heartsuit$ 2. $\spadesuit$ 3. $\diamondsuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\spadesuit$ 6. $\diamondsuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\diamondsuit$ 10. $\clubsuit$

# Soluzioni degli esercizî

## 3. ♢

**1.**

(A) Sostituendo la terza colonna con sé stessa più le prime due, la seconda riga con sé stessa meno la prima, la prima con sé stessa meno $k+1$ volte la terza e sviluppando lungo l'ultima colonna si verifica che il determinante di $M$ è uguale a quello di una matrice $2\times 2$ in cui la seconda colonna è multipla di $k+3$, e il resto dei calcoli è semplicissimo

(B) $k+3$ e $1-k$

(C) $k_0=-1$; $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(D) Per $k\neq -1,0,2$ autovalori $k^2+1,\ k+3,\ 1-k$ con molteplicità algebrica e geometrica 1: diagonalizzabile; per $k=-1$ autovalore 2 con molteplicità algebrica 3 e geometrica 2: non diagonalizzabile; per $k=0$ autovalore 3 con molteplicità algebrica e geometrica 1 e autovalore 1 con molteplicità algebrica e geometrica 2: diagonalizzabile; per $k=2$ autovalore 5 con molteplicità algebrica 2 e geometrica 1 e autovalore $-1$ con molteplicità algebrica e geometrica 1: non diagonalizzabile

**2.**

(A) La prima componente di $\alpha'(t)$ si annulla per $t=0,\pm\frac{\pi}{2},\pm\pi$, la seconda per $t=-\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi$; inoltre $\alpha(-\pi)=\alpha(\pi)=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(B) $\alpha(-\frac{3}{4}\pi)=\alpha(\frac{\pi}{4})=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

(C) 2

(D) Positiva per $t$ nell'intervallo $(-\frac{3}{4}\pi,\frac{\pi}{4})$, nulla agli estremi, negativa fuori.

(E) $\frac{4}{3}$

1. ♡ 2. ♠ 3. ♢ 4. ♣ 5. ♠ 6. ♢ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♢ 10. ♣