Geometria 11/5/22

Curva piana: $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ regolare $(\alpha'(t) \neq 0 \ \forall t)$

Sempre possibile riparametrizzare in p.d'a. $(\|\alpha'(t)\| = 1)$

Curvatura = "misura di quanto non è dritta"
= 1/raggio della circonf. con triplice contatto.

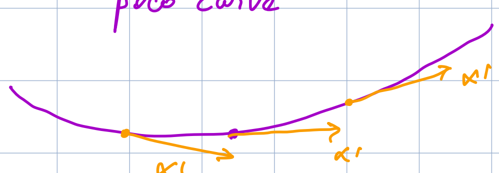
non ovvio che esista né come trovarla.

Prop: se α è in p.d'a. allora l'unica circonf. avente contatto triplo con α in $\alpha(t_0)$ è quella che passa per $\alpha(t_0)$ e ha centro $\alpha(t_0) + \dfrac{\alpha''(t_0)}{\|\alpha''(t_0)\|^2}$ (se $\alpha''(t_0) \neq 0$); in particolare ha raggio $1/\|\alpha''(t_0)\|$.

Dunque per α in p.d'a. poniamo

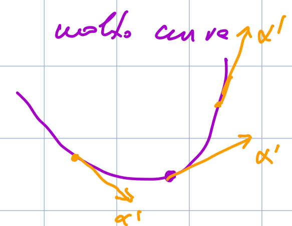
$$\kappa(t_0) = \|\alpha''(t_0)\| \quad \text{curvatura.}$$

poco curva



α' cambia poco

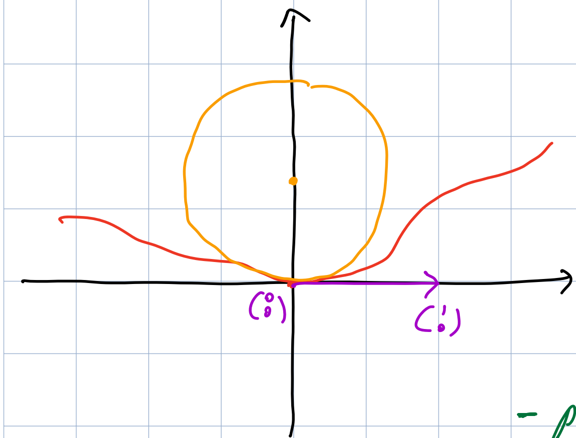
molto curva



α' cambia molto

$\Rightarrow$ logico che α'' misuri quanto è curva.

Dimo: espongo traslaz + rotaz. per supporre
$t_0 = 0 \qquad \alpha(0) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \qquad \alpha'(0) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$



$\|\alpha'(t)\| \equiv 1$
$\Rightarrow \alpha''(t) \perp \alpha'(t) \quad \forall t$
$\Rightarrow \alpha''(0) = \begin{pmatrix}0\\c\end{pmatrix}$

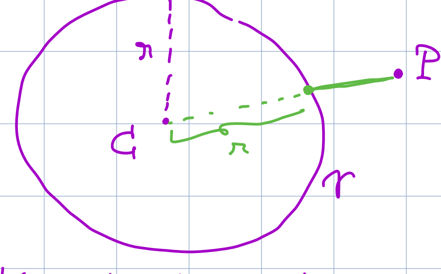
circonf con contatto triplo:
- passa per $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$
- in $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ ha tg. come $\alpha = \operatorname{Span}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$
  $\Rightarrow$ ha centro $\begin{pmatrix}0\\r\end{pmatrix}$ (raggio $|r|$)

Tesi $\begin{pmatrix}0\\r\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + \dfrac{\begin{pmatrix}0\\c\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}0\\c\end{pmatrix}\right\|^2} = \begin{pmatrix}0\\1/c\end{pmatrix}$ cioè $r = 1/c$.

$d(t) = \operatorname{dist}\left(\alpha(t), \text{circonf. per } 0 \text{ e centro } \begin{pmatrix}0\\r\end{pmatrix}\right)$

voglio
$d(0) = 0$
$d'(0) = 0$
$d''(0) = 0.$

$d(t) = d(\alpha(t), \gamma) = \left| r - \operatorname{dist}\left(\begin{pmatrix}X(t)\\Y(t)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\r\end{pmatrix}\right)\right|$
$= \left| r - \sqrt{X(t)^2 + (Y(t) - r)^2}\right|$



$d(P, \gamma) = |\overline{PC} - r|$

$d(0) = 0$ ✓ calcolo d', d'' ignorando $|\cdot|$

$$d' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{X(t)^2 + (Y(t)-r)^2}} \left(2X(t) \cdot X'(t) + 2(Y(t)-r) \cdot Y'(t)\right)$$

$$= \frac{X \cdot X' + (Y-r) \cdot Y'}{\sqrt{X^2 + (Y-r)^2}}$$ in $t=0$ $\frac{0 \cdot 1 + (-r) \cdot 0}{|r|} = 0$

$$d'' = \frac{X'^2 + X \cdot X'' + Y'^2 + (Y-r) \cdot Y''}{\sqrt{}} + \underbrace{\frac{\left(X \cdot X' + (Y-r)Y'\right)^2}{\left(\sqrt{}\right)^3}}_{\text{in } t=0:\ \frac{0^2}{r^3} = 0}$$

$\parallel$

in $t=0$: $\frac{1^2 + 0 \cdot 0 + 0^2 + (0-r) \cdot c}{|r|}$

$d''(0) = 0 \iff 1 - r \cdot c = 0 \iff r = 1/c.$ ■

<u>Ricordo</u>: α in p.d'a. $\Longrightarrow \kappa(t) = \|\alpha''(t)\|.$

$\|\alpha'(t)\| \equiv 1$

<u>Att</u>: sapendo che $\|\alpha'(t_0)\| = 1$ <u>NON</u> si conclude che $\kappa(t_0) = \|\alpha''(t_0)\|.$

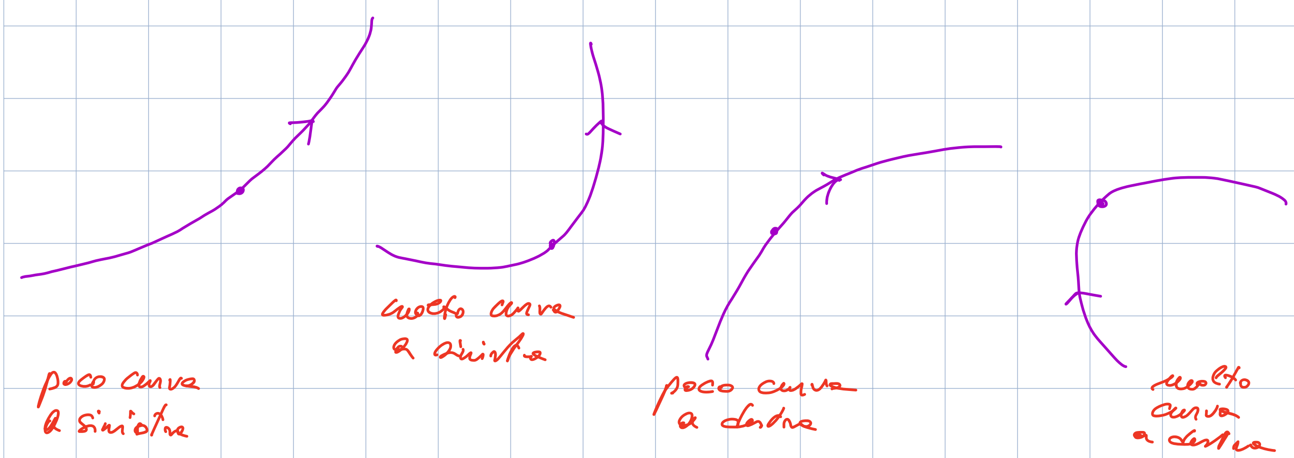
Per β qualsiasi bisogna trovare $\boxed{\alpha = \beta \circ \tau}$ che sia in p.d'a. e usare α per calcolare κ.

Non si riesce quasi mai:

$\tau = \sigma^{-1}$ $\qquad$ $\boxed{\sigma(t) = \int_a^t \|\alpha'(u)\| \, du}$

Però c'è formula.

Curva orientata:



Modifico la def. di K dicendo:

$K(t) = + \|\alpha''(t)\|$ se curva a sinistra

$K(t) = - \|\alpha''(t)\|$ se curva a destra

(sempre se in p.d'a.).

Teo: se β è curva qualsiasi

$$K(t) = \frac{\det(\beta'(t), \beta''(t))}{\|\beta'(t)\|^3}.$$

Es: $\beta(t) = \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \ln(1+t) \end{pmatrix}$

$$\beta'(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(2t) \\ \frac{1}{1+t} \end{pmatrix} \qquad \beta''(t) = \begin{pmatrix} -4\sin(2t) \\ -\frac{1}{(1+t)^2} \end{pmatrix}$$

$$\beta'(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \beta''(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\kappa(0) = \frac{\det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^3} = -\frac{2}{5\sqrt{5}}.$$

Curve nello spazio.

$$\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^3$$

- quanto è curva?
- quanto non planare (ritorta) è?

Prop: se α è in p.d'a. $(\|\alpha'(t)\| = 1)$ e $\alpha''(t_0) \neq 0$ allora:

- esiste un solo piano che ha contatto triplice con α in $\alpha(t_0)$ ed è quello con giacitura $\mathrm{Span}(\alpha'(t_0), \alpha''(t_0))$

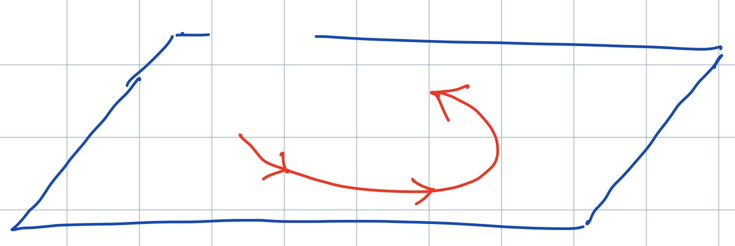
piano osculatore

- esiste una sola circonf. che ha contatto triplico con α in $\alpha(t_0)$ ed è quella con centro $\alpha(t_0) + \frac{\alpha''(t_0)}{\|\alpha''(t_0)\|^2}$.

circonf. osculatrice

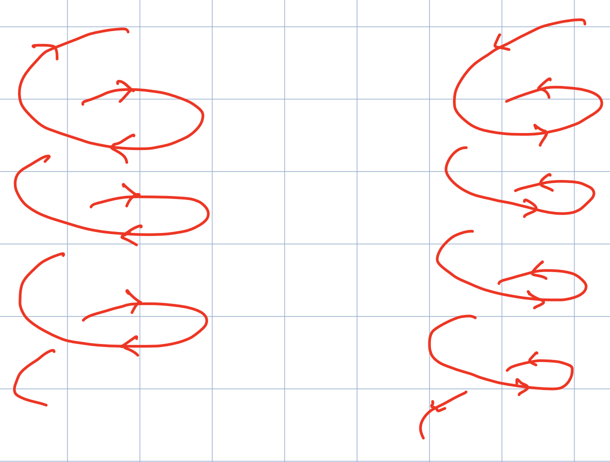
curvatura $\mathcal{K}(t) = \|\alpha''(t)\|$.

Attenzione: in $\mathbb{R}^3$ non ha senso sin/dx quindi non si dà un segno a $\mathcal{K}$ per curve orientate.

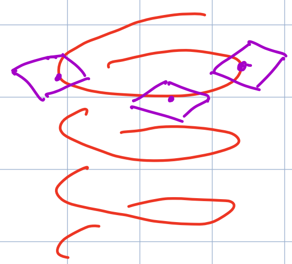


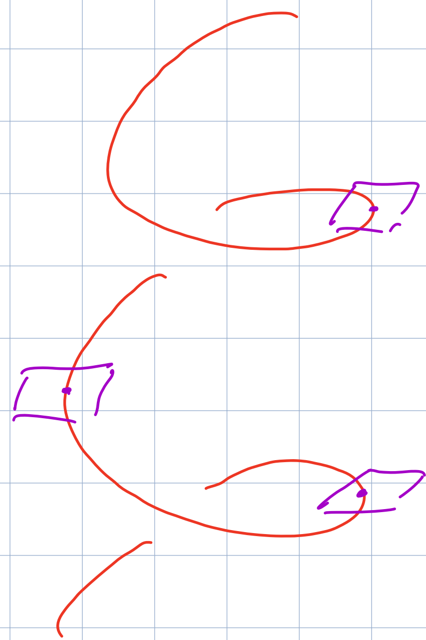
da sopra/sotto scambia curve e sin/dx.

Cerchiamo: misura della torsione



ha senso il segno

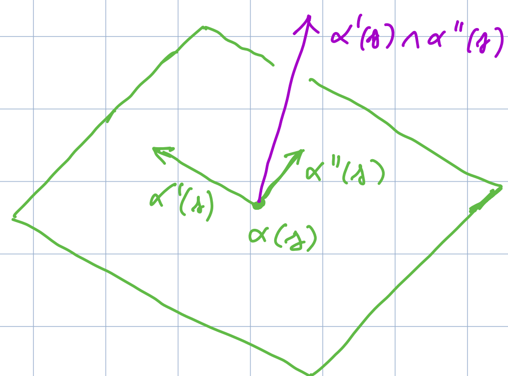




misura torsione

= variazione piano osculatore

Idea per misurarla:



idea: misurare come varia lui

Def: data $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ in p.d'a. $(\|\alpha'(s)\| \equiv 1)$

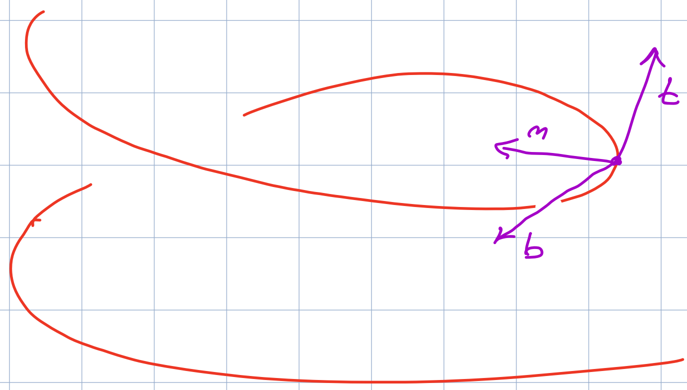
chiamo:

$t(s) = \alpha'(s)$ vettore tangente

$n(s) = \dfrac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$ vettore normale

$b(s) = t(s) \wedge n(s)$ vettore binormale

$(t(s), n(s), b(s))$ riferimento di Frénet



(t, n, b) terna ortonormale (matrice ortogonale)

Giacitura del piano osculatore è $b(s)^{\perp}$.
Misura variaz. piano osc $= b'(s)$.

Teo: data α in p.d'a. esistono $\varkappa, \tau$ t.c.

$$\begin{cases} t'(s) = \varkappa(s) \cdot n(s) \\ n'(s) = -\varkappa(s) \cdot t(s) + \tau(s) \cdot b(s) \\ b'(s) = -\tau(s) \cdot n(s) \end{cases}$$

cioè $$(t, n, b)' = (t, n, b) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\varkappa & 0 \\ \varkappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}$$

Inoltre $\varkappa$ è la curvatura. Chiamo τ torsione

Dimo: $t(s) = \alpha'(s)$

$$t'(s) = \alpha''(s) = \underbrace{\|\alpha''(s)\|}_{\varkappa(s)} \cdot \underbrace{\frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}}_{n(s)}$$

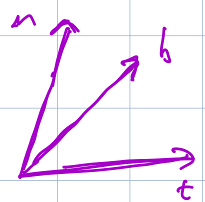
- $\|b(s)\| \equiv 1 \Longrightarrow \boxed{b'(s) \perp b(s)}$

- $b(s) = t(s) \wedge n(s)$

$$\Longrightarrow b'(s) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Leibnitz}}}{=} t'(s) \wedge n(s) + t(s) \wedge n'(s)$$

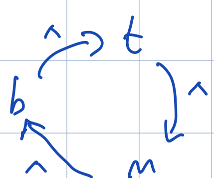
$$= \underbrace{\kappa(s) \cdot n(s) \wedge n(s)}_{0} + t(s) \wedge n'(s)$$

$$\Longrightarrow \boxed{b'(s) \perp t(s)}$$



$$\Longrightarrow b'(s) \in Span(n(s))$$

introduco $\tau(s)$ t.c. $b'(s) = -\tau(s) \cdot n(s)$.



$$n = b \wedge t$$

$$\Longrightarrow n' = b' \wedge t + b \wedge t'$$

$$= (-\tau \cdot n) \wedge t + b \wedge (\kappa \cdot n)$$

$$= \kappa \cdot b \wedge n - \tau \cdot n \wedge t$$

$$= \kappa \cdot (-t) - \tau \cdot (-b) = -\kappa \cdot t + \tau \cdot b. \quad \blacksquare$$

Ripeto: (t, n, b) rif. Frénet matrice ortog.
$(t,n,b)' = (t,n,b) \cdot$ matrice antisimm.

Prop: se $M : [a,b] \longrightarrow M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ è ortogonale $\forall s$
allora $M' = M \cdot A$ con A antisimm.

Dimo: ${}^tM \cdot M = I_3$

$$\underbrace{{}^tM' \cdot M}_{{}^tA} + \underbrace{{}^tM \cdot M'}_{A} = 0$$

$\Rightarrow A$ antisimm; $M \cdot A = M \cdot {}^tM \cdot M' = M'$. $\blacksquare$

Data β qualsiasi non in p.d'a. per calcolare
κ, τ dovrei trovare $\alpha = \beta \circ u$ che sia in p.d'a.

Formule:

$$\kappa(s) = \frac{\|\beta'(s) \wedge \beta''(s)\|}{\|\beta'(s)\|^3} \quad (*)$$

$$\tau(s) = \frac{\langle \beta'(s) \wedge \beta''(s) \mid \beta'''(s) \rangle}{\|\beta'(s) \wedge \beta''(s)\|^2}$$

Oss: per β planare era:

$$K = \boxed{\frac{\det(\beta', \beta'')}{\|\beta'\|^3}}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \leadsto \bar{\beta} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Uso (*) per $\bar{\beta}$ trovo

$$\frac{\left\| \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X'' \\ Y'' \\ 0 \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^3} = \frac{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ X'Y'' - X''Y' \end{pmatrix} \right\|}{\left(X'^2 + Y'^2 + 0^2 \right)^{3/2}}$$

$$= \boxed{\frac{\left| \det \begin{pmatrix} X' & X'' \\ Y' & Y'' \end{pmatrix} \right|}{\left(X'^2 + Y'^2 \right)^{3/2}}}$$

in accordo con la formula 2D salvo per il segno.

Visto: come calcolare K, τ per β non in p.d.a.

Come calcolare (t, n, b) rif. Frénet.

I. $t(s) = \alpha'(s) / \|\alpha'(s)\|$

Ancora vero che piano osculatore è generato da α', α''

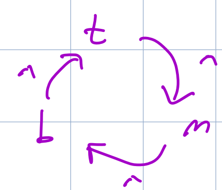
ottengo $t(s), n(s)$ per ortonormalizzazione G-S
da $\alpha'(s), \alpha''(s)$

NO : $n(s) = \dfrac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$

$$b(s) = t(s) \wedge n(s)$$

II.

$$t(s) = \frac{\alpha'(s)}{\|\alpha'(s)\|}$$



$$b(s) = \frac{\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)}{\|\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)\|}$$

$$n(s) = b(s) \wedge t(s).$$