Geometria 5/5/22

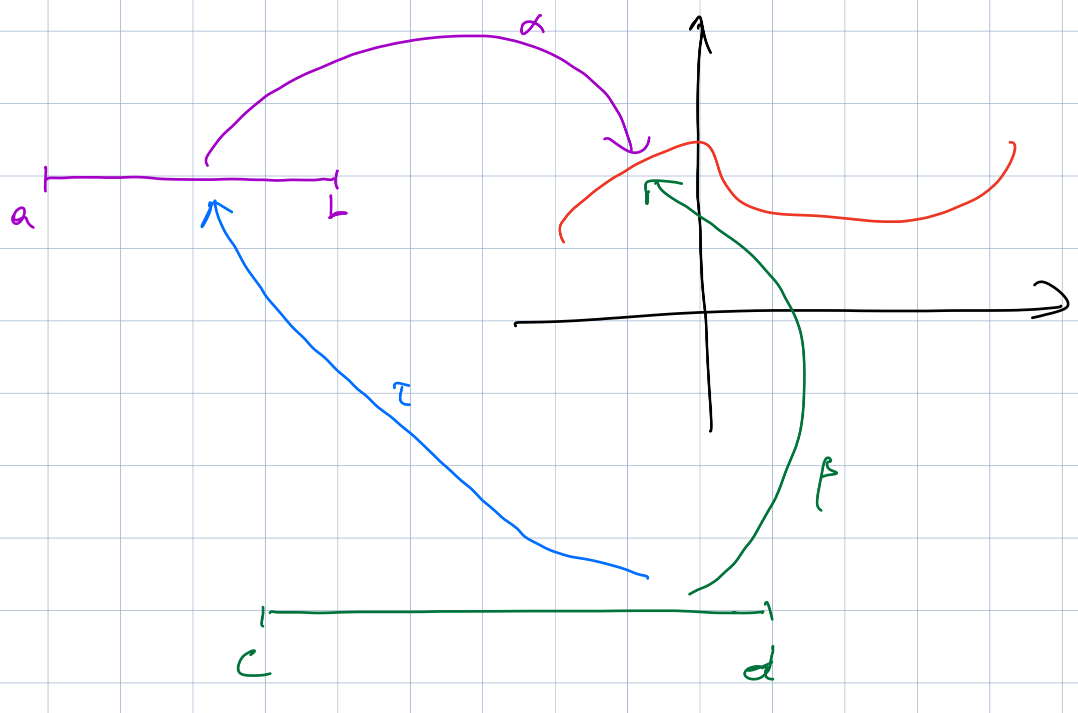
curva parametrizzata regolare

$\alpha : I \to \mathbb{R}^n \qquad \alpha'(t) \neq 0 \quad \forall t$

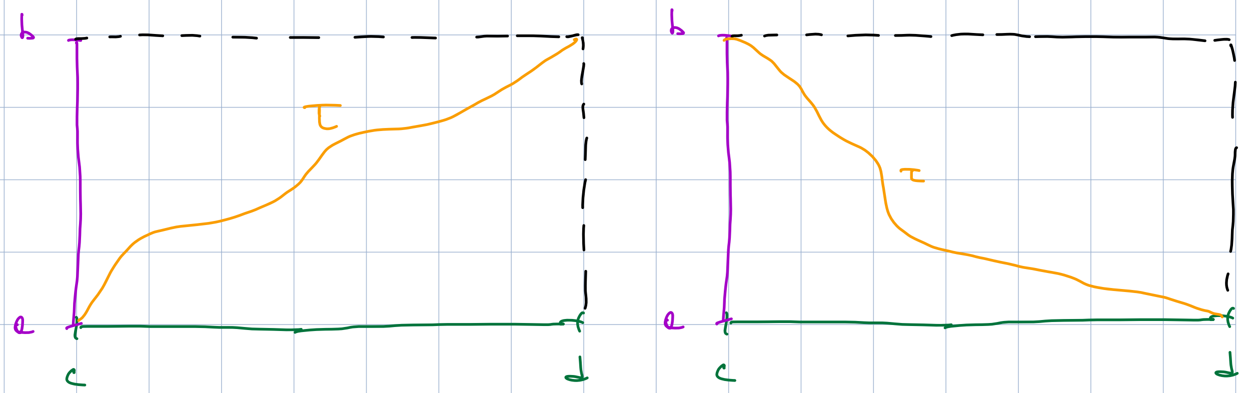
cambio parametro $\qquad \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$

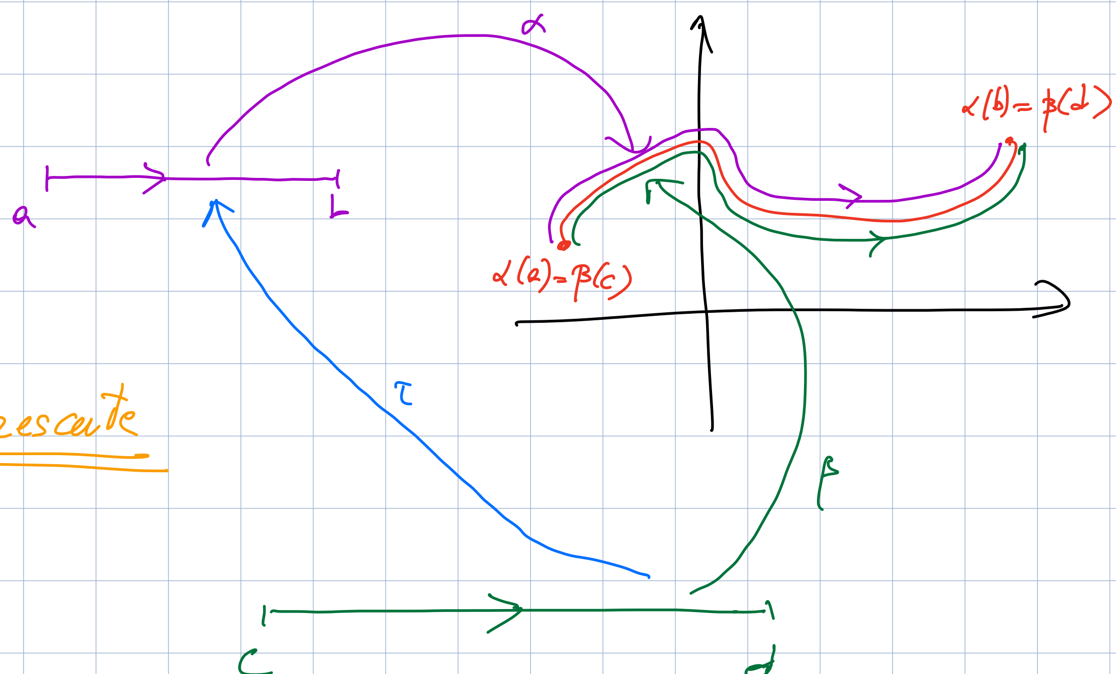
$\beta : [c,d] \to \mathbb{R}^n$

$\beta(s) = \alpha(\tau(s))$

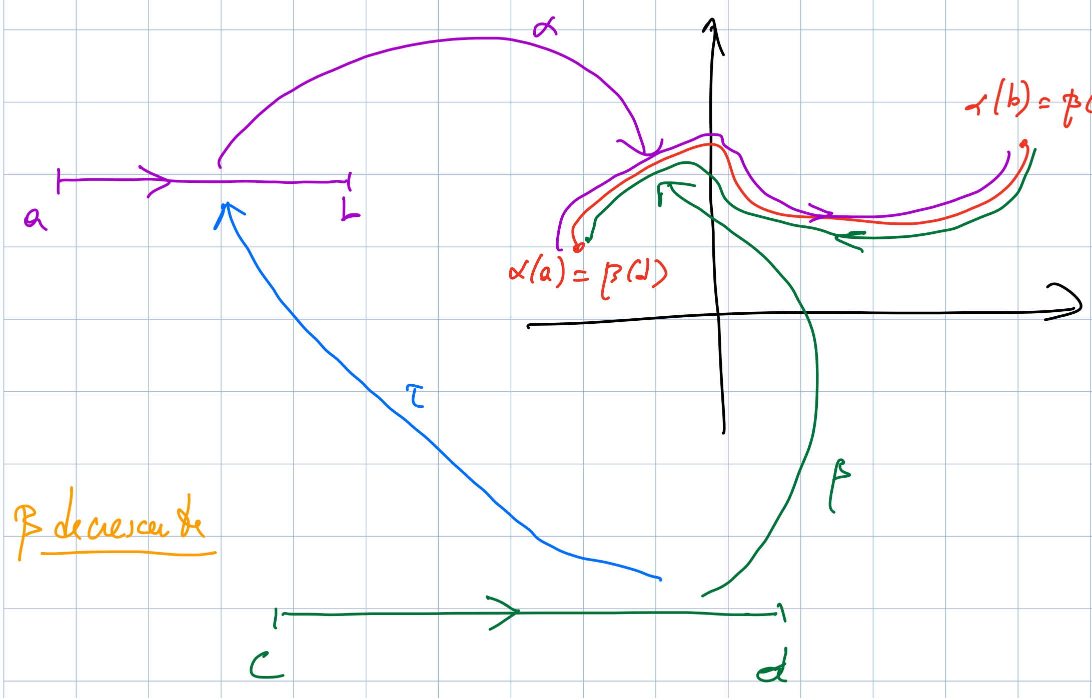


τ bijettiva derivabile con inversa derivabile



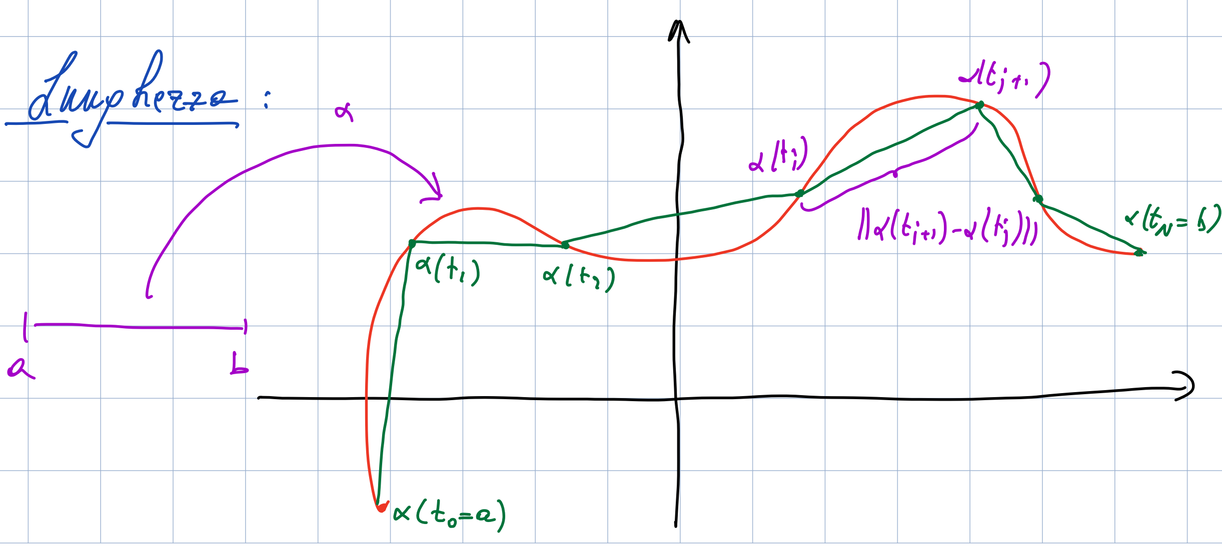


τ crescente



Chiamo curva orientata una in cui è specificato il verso di percorrenza; per curve orientate sono ammessi solo cambi di parametro crescenti (mantengono orientazione).

Lunghezza:



$a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$

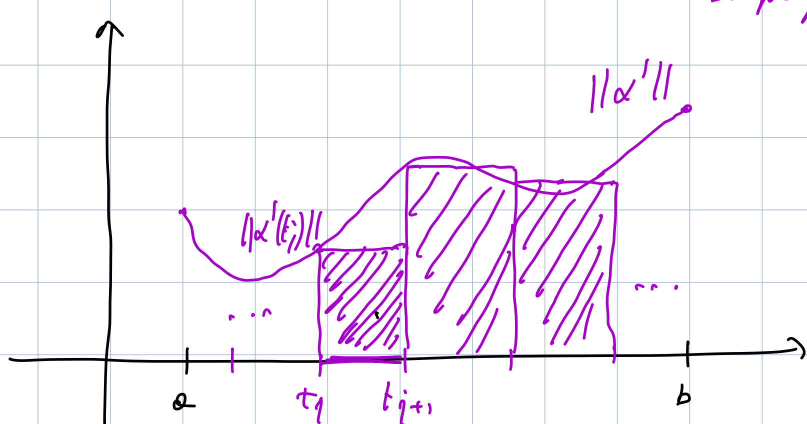
$$L(\alpha) \cong \sum_{j=0}^{N} \|\alpha(t_{j+1}) - \alpha(t_j)\|$$

Se t_{j+1} è molto vicino a t_j ho

$$\alpha(t_{j+1}) \cong \alpha(t_j) + \alpha'(t_j)\cdot(t_{j+1}-t_j)$$

Taylor I ordine

$$L(\alpha) \cong \sum_{j=0}^{N} \underbrace{\|\alpha'(t_j)\|\cdot(t_{j+1}-t_j)} \xrightarrow[\substack{\text{suddivisione}\\ \text{sempre più fine}}]{N\to\infty} \int_a^b \|\alpha'(t)\|\,dt$$



Def: $L(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\|\,dt$

Prop: se β è ottenuta da α per cambio parametro allora

$$L(\beta) = L(\alpha).$$

Dim: $\beta(s) = \alpha(\tau(s))$ $\qquad \tau : [c,d] \to [a,b]$

$$L(\beta) = \int_c^d \|\beta'(s)\|\, ds = \dots$$

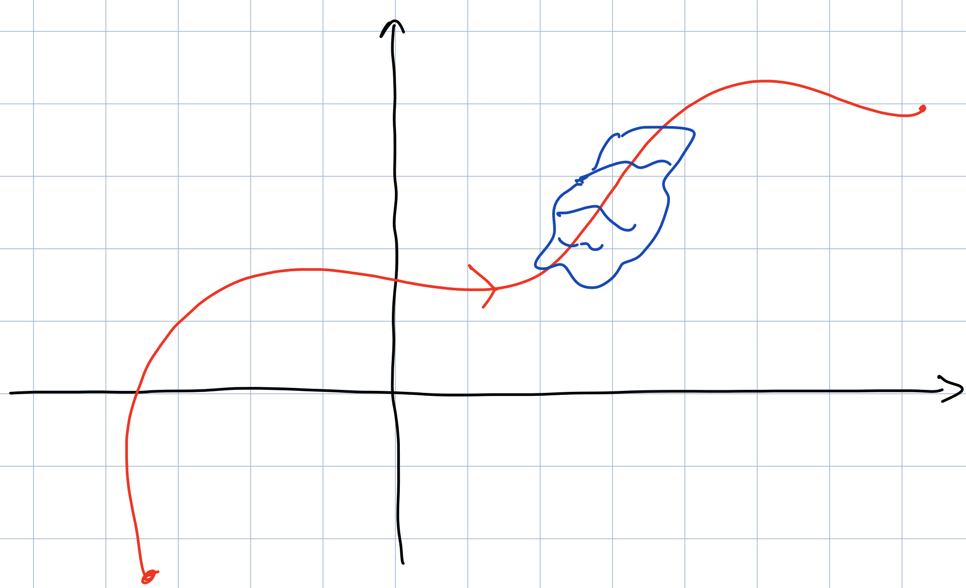
$$\beta'(s) = \alpha'(\tau(s)) \cdot \tau'(s)$$

$$\|\beta'(s)\| = \|\alpha'(\tau(s))\| \cdot |\tau'(s)|$$

$$\dots = \int_c^d \|\alpha'(\underbrace{\tau(s)}_{t})\| \cdot \underbrace{|\tau'(s)| \cdot ds}_{dt} = \dots$$

$$t = \tau(s) \implies dt = |\tau'(s)| \cdot ds$$

$$\dots = \int_a^b \|\alpha'(t)\| \cdot dt = L(\alpha). \qquad \blacksquare$$



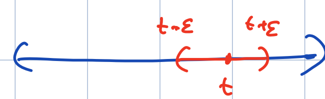
$F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad F(x) =$ "costo" di percorrenza nel pto x di un tratto infinitesimo di curva

Costo complessivo di percorrenza di α:

$$\int_a^b F(\alpha(t)) \cdot \|\alpha'(t)\| \cdot dt$$

Lo chiamo $\int_\alpha F$ $\qquad$ F funzione scalare su $\mathbb{R}^n$

Come sopra: non dipende dalla parametrizzazione.



Chiamo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto
se $\forall x \in \Omega \ \exists r$ t.c. $B(x,r) \subset \Omega$

$$B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y-x\| < r\}.$$

Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è aperto e $F : \Omega \to \mathbb{R}$
e $\alpha : [a,b] \to \Omega$ ha senso

$$\int_\alpha F = \int_a^b F(\alpha(t)) \cdot \|\alpha'(t)\| \, dt .$$

Def: dico che $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ è una parametrizzazione in parametro d'arco se $\|\alpha'(t)\| = 1 \quad \forall t$.

Prop: ogni curva si può riparametrizzare in p. d'arco.

Dim: data $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ pongo

$$\sigma(t) = \int_a^t \|\alpha'(u)\| \cdot du = \text{lunghezza della curva su } [a,t]$$

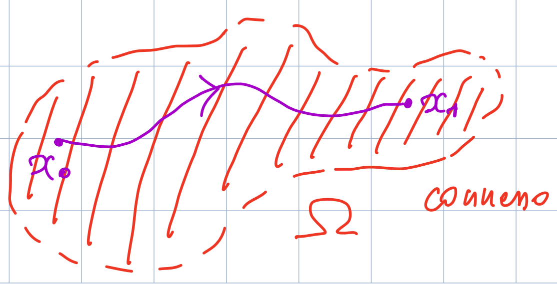
$$\sigma : [a,b] \to [0,L] \qquad L = L(\alpha)$$

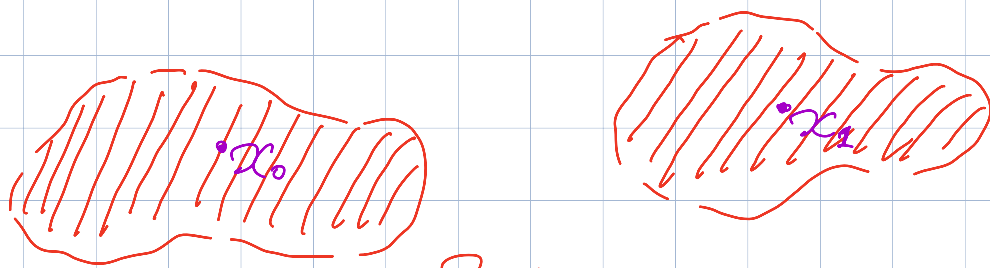
$$\tau = \sigma^{-1} : [0,L] \to [a,b]$$

$$\beta(s) = \alpha(\tau(s)) \qquad \sigma'(t) = \|\alpha'(t)\|$$

$$\beta'(s) = \alpha'(\tau(s)) \cdot \tau'(s)$$
$$= \alpha'(\tau(s)) \cdot \frac{1}{\sigma'(\tau(s))}$$
$$= \frac{\alpha'(\tau(s))}{\|\alpha'(\tau(s))\|} \Rightarrow \|\beta'(s)\| = 1 \quad \forall s. \qquad \blacksquare$$

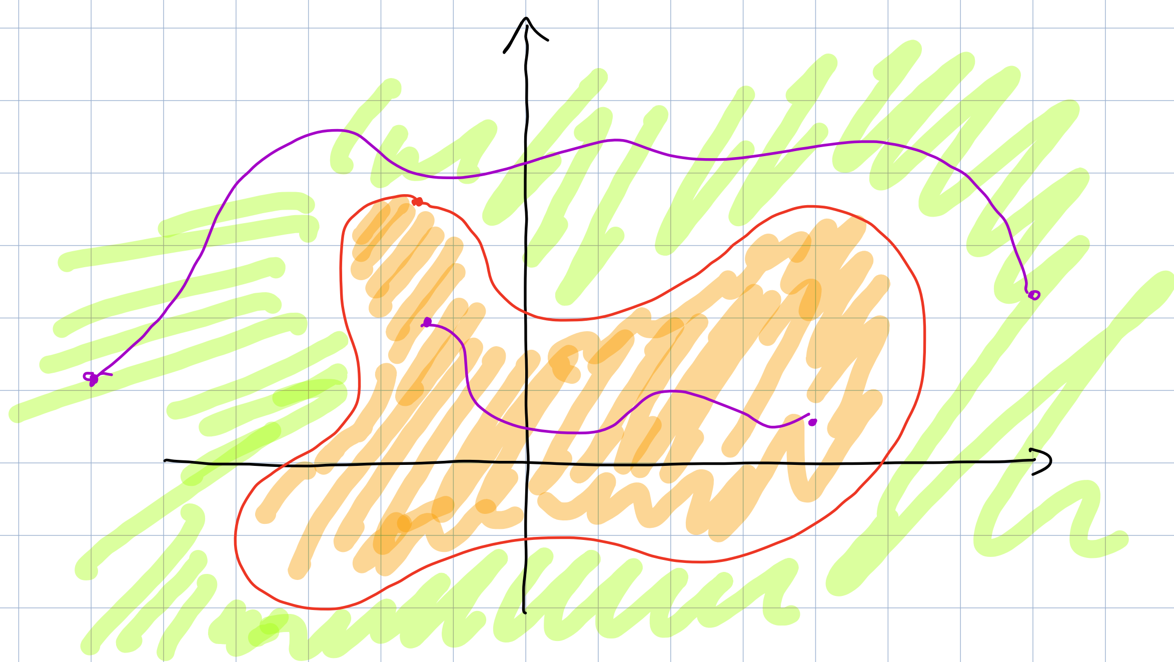
Def: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto è detto connesso se $\forall x_0, x_1 \in \Omega$
$\exists\, \alpha : [0,1] \to \Omega$ continua t.c. $\alpha(x_0) = \alpha(x_1)$.





Ω non connesso

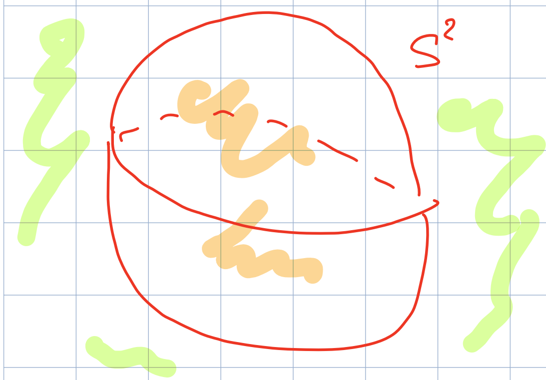
__Teo__ (Jordan): se $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ è una curva semplice e chiusa (anche solo continua) allora $\mathbb{R}^2 \setminus Im(\alpha)$ è fatto di due pezzi connessi, uno limitato e uno no.



dentro fuori

E' vero ma molto difficile per α continua

Analogo in dimensioni superiori è falso:



per superfici che sono "come S^2 ma deformate" non è vero in generale che dividono $\mathbb{R}^3$ in dentro/fuori.

Come definire curve?

1. Grafici di funzioni:

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$

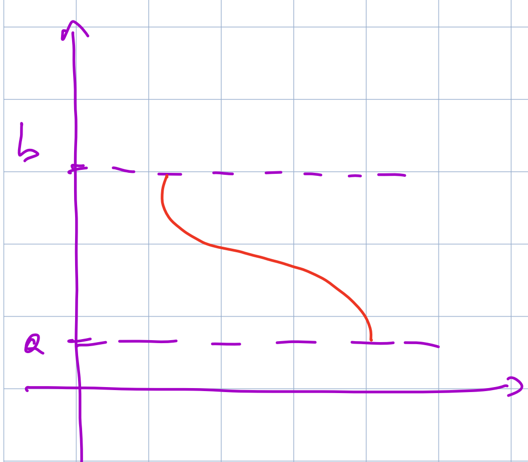
Grafico $\gamma = \{ (x, \gamma(x)) : x \in [a,b] \}$

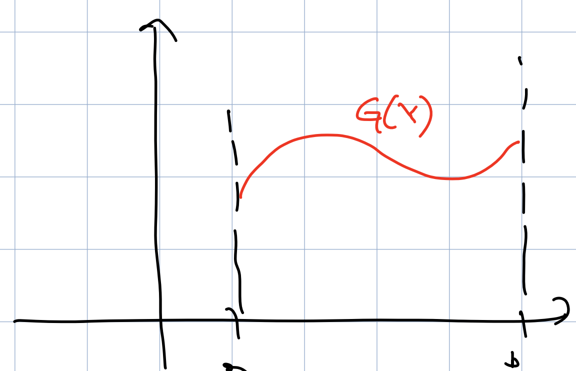
$= \mathrm{Im}(\alpha)$

$\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^2 \qquad \alpha(x) = (x, \gamma(x))$

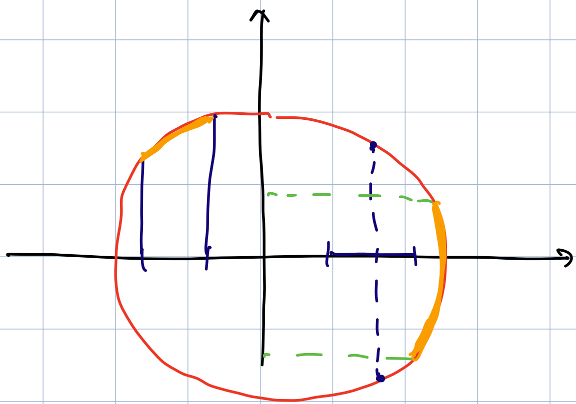
$\chi : [a,b] \to \mathbb{R}$

$\{ (\chi(y), y) : y \in [a,b] \}$

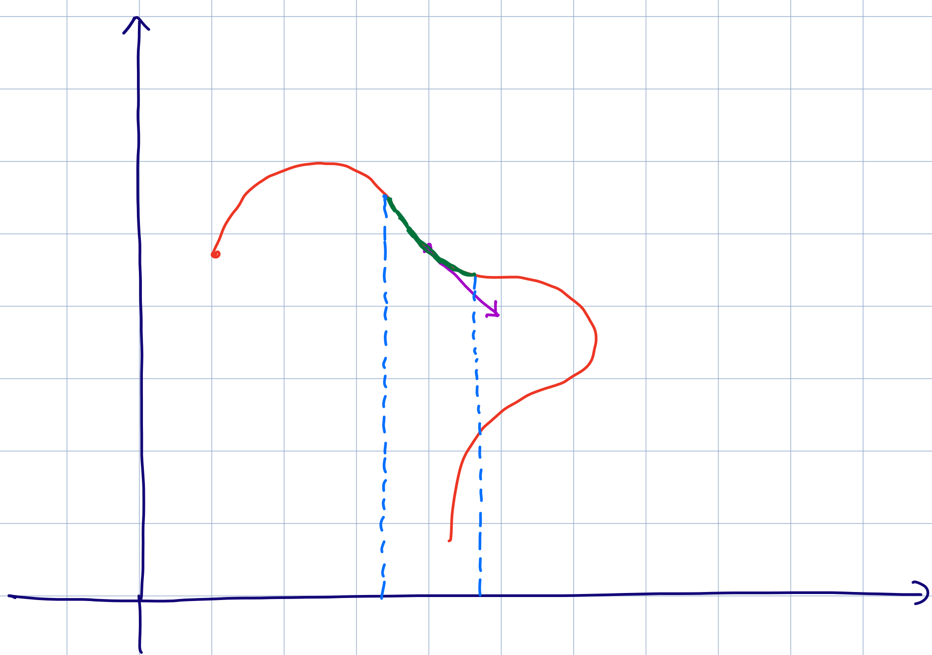


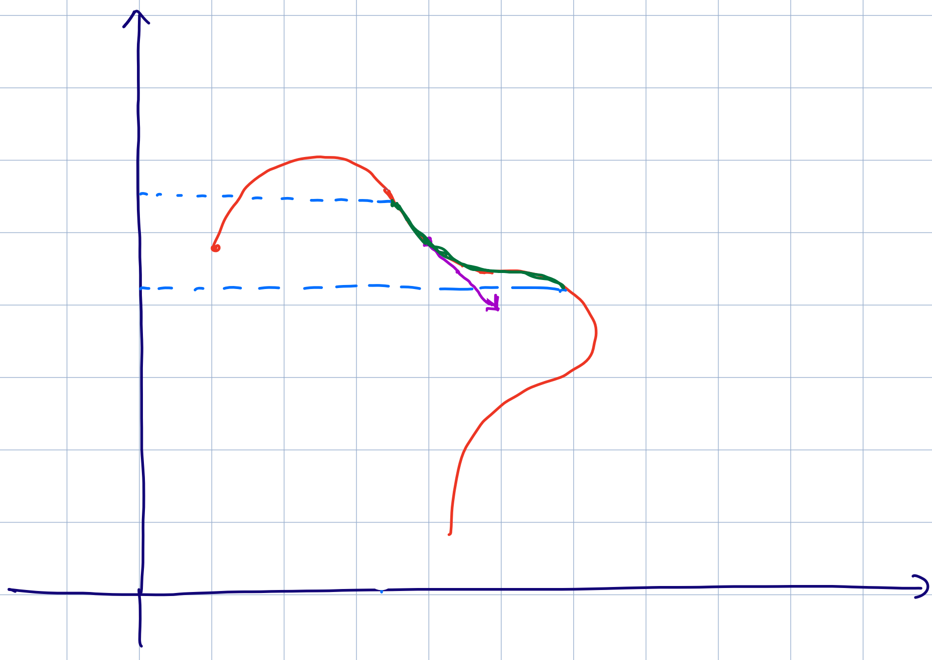


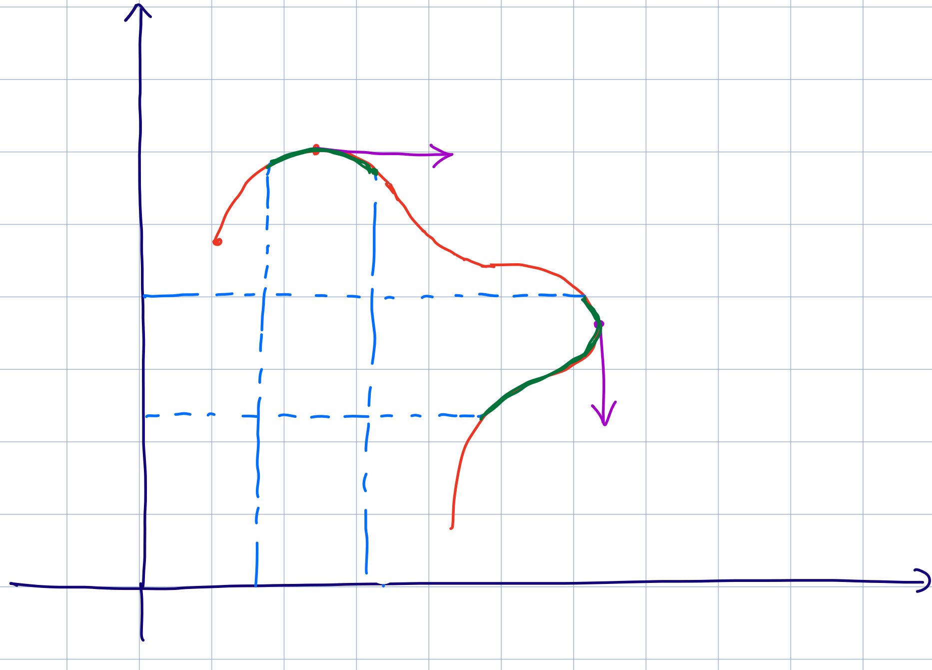
Tutte le curve sono grafici? No:



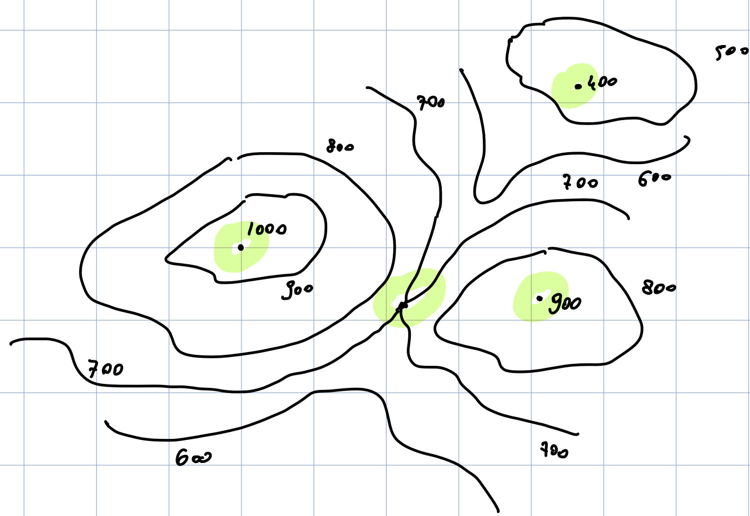
Sempre vero: ogni curva regolare $\underbrace{}_{}$ in $\mathbb{R}^2$ è "localmente" grafico di una coordinata in funzione dell'altra:







2. Curve di livello.



Prop: dato $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aperto, $F : \Omega \to \mathbb{R}$ derivabile

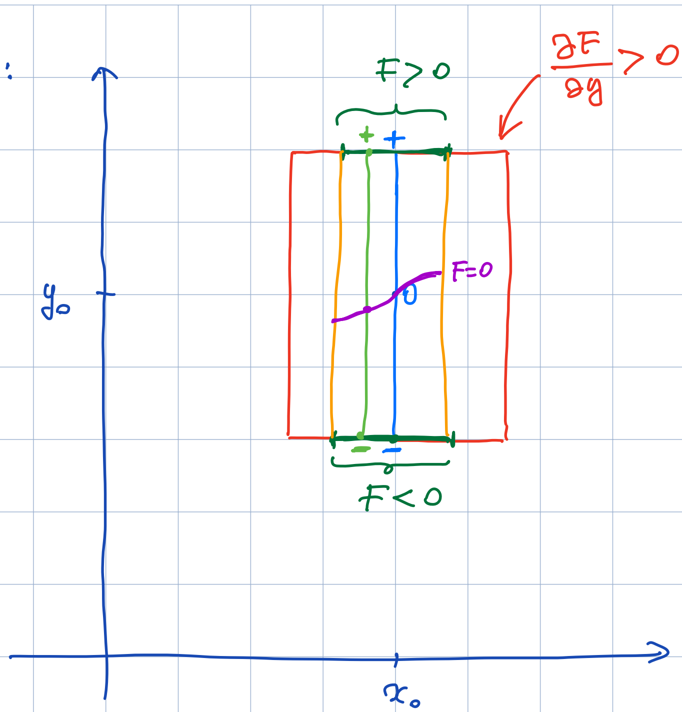
$$\Gamma = \{ (x,y) \in \Omega \ : \ F(x,y) = 0 \}$$

Se $(x_0,y_0) \in \Gamma$ e $JF(x_0,y_0) \neq 0$ allora Γ è localmente grafico vicino a (x_0,y_0); anzi:

se $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$ localmente Γ è grafico di $y = Y(x)$ dove $Y'(x) = -\dfrac{\partial F/\partial x\,(x, Y(x))}{\partial F/\partial y\,(x, Y(x))}$

se $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0) \neq 0$ loc. Γ è grafico di $x = X(y)$ con $X'(y) = -\dfrac{\partial F/\partial y\,(X(y), y)}{\partial F/\partial x\,(X(y), y)}$.

Idea dimo:



$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) > 0$

scoperto T è loc. $y = Y(x)$

Fatto: Y è derivabile. Assumendolo:

$$(x, Y(x)) \in T \implies F(x, Y(x)) = 0$$

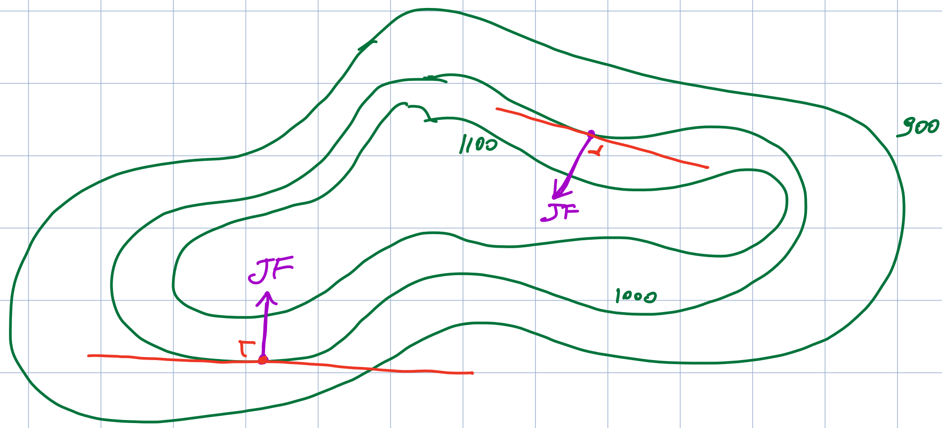
$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\quad '' \quad \Big) = 0$$

$$\parallel$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\dots)\cdot 1 + \frac{\partial F}{\partial y}(\dots)\cdot Y'(x) = 0$$

$$\implies Y'(x) = -\frac{\partial F/\partial x\,(\dots)}{\partial F/\partial y\,(\dots)}.$$

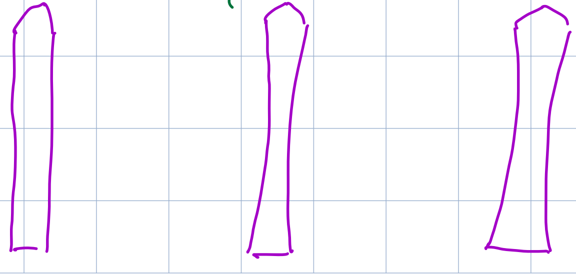
Cor: se $F : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Gamma = \{ F = 0 \}$
e $\nabla F(x,y) \neq 0$ $\forall x,y \in \Gamma$ allora
Γ è curva e la tangente in (x,y)
è $\perp$ a $\nabla F(x,y)$.

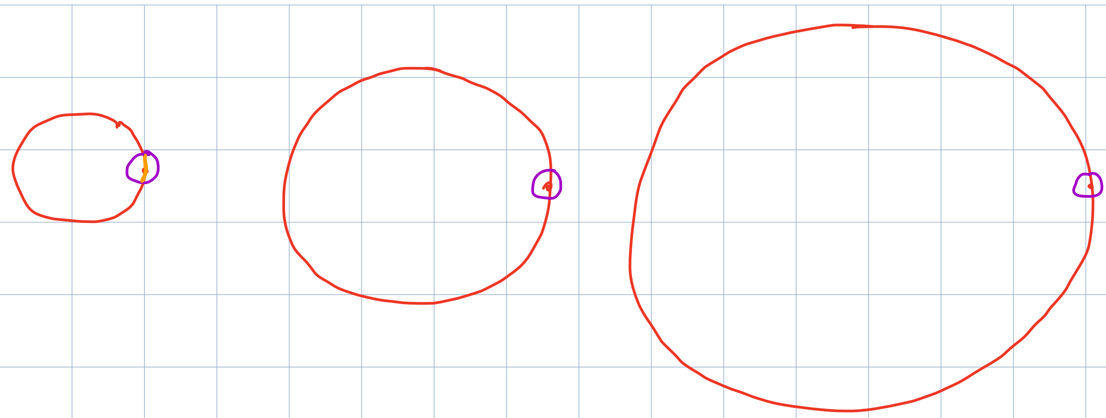


loc. se è $y = Y(x)$ la Γ è par da $x \mapsto (x, Y(x))$
$\Rightarrow$ tangente ha direzione $(1, Y'(x)) = \left(1, -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}\right)$

che è $\perp$ $\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right)$.

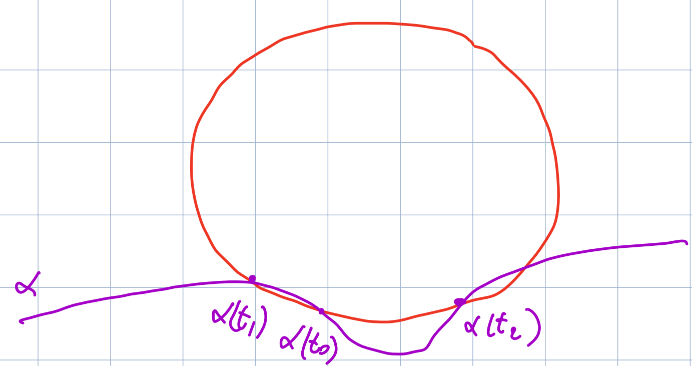
Come misurare quanto una curva non è dritta.





Per circonf. misura curvatura è reciproco del raggio.

Idea: data curva e un suo punto cercare la circonf. che "approssima meglio" la curva nel punto e definiamo curvatura $= 1/$raggio di tale circonf



$t_1, t_2 \longrightarrow t_0$

la circonf. tende a una che ha contatto triplice

Lem: se $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ e $\|\gamma(t)\| = 1 \quad \forall t$
allora $\gamma'(t) \perp \gamma(t) \quad \forall t$.

Dim. : $\|\gamma(t)\|^2 = 1$

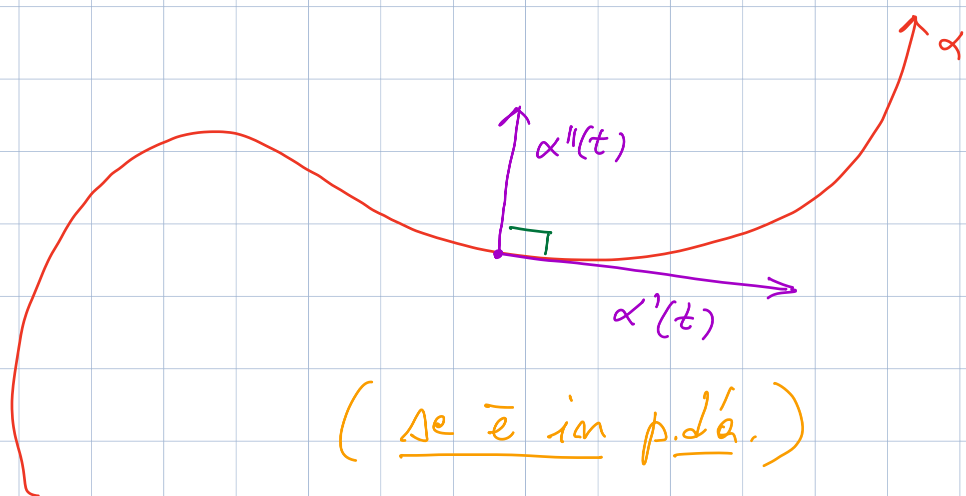
$$\Rightarrow \gamma_1(t)^2 + \dots + \gamma_n(t)^2 = 1$$

$$\frac{d}{dt}\left(\quad '' \quad \right) = 0$$

$$2\gamma_1(t)\cdot\gamma_1'(t) + \dots + 2\gamma_n(t)\cdot\gamma_n'(t) = 0$$

$$2\langle \gamma(t) | \gamma'(t)\rangle = 0. \qquad \blacksquare$$

Cor: se α è in p.d'a. ($\|\alpha'(t)\| = 1 \ \forall t$) allora $\alpha''(t) \perp \alpha'(t)$.



(se è in p.d'a.)